Mathematik: Die unauflösliche Verflochtenheit von Fachwissenschaft und Didaktik

Reinhard Winkler

1 Wider ein Klischee

"Dieser Lehrer[1] ist ja ein hervorragender Wissenschaftler, er kann sein Wissen aber nicht vermitteln", so lautet eine häufig zu hörende Floskel. Eine andere Formulierung, in der ein verwandtes Klischee immer wieder zum Ausdruck gebracht wird, ist die Forderung: "Unsere Lehrer an den Höheren Schulen unterrichten ein Fach, sie sollten aber junge Menschen unterrichten."

Mit solchen Stehsätzen wird die Einschätzung suggeriert, Kompetenz in fachlicher und didaktischer Hinsicht seien unabhängig voneinander, und die Defizite in unserem Bildungswesen (die sich in Zeiten von PISA und ähnlichen empirischen Untersuchungen nicht mehr so leicht verdrängen lassen) beruhten darauf, dass die didaktischen Fähigkeiten und Ambitionen vieler Lehrkräfte mit ihren fachwissenschaftlichen nicht mithielten. Deshalb, so wird - gemäß dem hier nicht angebrachten Prinzip vom schwächsten Glied einer Kette - weiter behauptet, sei die Ausbildung dahingehend zu verbessern, dass der Fachwissenschaft Gewicht genommen und fachunabhängiger Didaktik zugeschlagen würde.

Das Gegenteil jedoch ist der Fall. Denn fachliche und didaktische Kompetenz sind viel enger miteinander verflochten, als es auf den ersten Blick den Anschein hat. Sogar viel enger, als es durch die zweifellos gültige und vor allem aus dem Munde von Fachwissenschaftlern ebenfalls sehr häufig zu hörende Feststellung, man könne nur unterrichten, was man selbst gut beherrsche, zum Ausdruck kommt. Denn diese Feststellung allein ließe angesichts wenig gelungenen Mathematikunterrichts immer noch Raum für die Deutung, die fachliche Lehrerausbildung reiche weit über das für den Schulunterricht nötige Maß hinaus, sowie für die Forderung, Ausbildungsressourcen weg vom Fachlichen hin zum Didaktischen umzuschichten.

Das wäre aber der falsche Weg. Und nicht deshalb, weil didaktischen Aspekten weniger Raum zu geben wäre, ganz im Gegenteil! Es gilt viel mehr zu begreifen, dass Fach und Didaktik nicht in Konkurrenz zueinander stehen, sondern beide - im Falle der Mathematik ganz besonders - gar nicht voneinander zu trennen sind. Schwächen im Mathematikunterricht haben in den allermeisten Fällen sehr manifeste Ursachen, denen nicht ohne substanzielle fachliche Erwägungen beizukommen ist, selbst wenn die Konsequenzen für Nichtfachleute rein didaktischer Natur zu sein scheinen. Betont sei bereits hier, dass ich mit fachlichen Erwägungen auch und sogar ganz besonders an Einsichten in innere und äußere Querverbindungen denke, also alles andere als engem Spezialistentum das Wort rede.

Für eine Behandlung dieses Themas aus bildungswissenschaftlicher Perspektive weise ich z.B. auf Beiträge im Rahmen einer Veranstaltung der Österreichischen Forschungsgemeinschaft von S.Blömeke (siehe [1]) und G.H.Neuweg hin (siehe [3], aber auch [4], insbesondere Abschnitt 2.4 und auf die dort erwähnte empirische Forschung). Die beschriebenen Phänomene lassen sich aber auch aus der Natur des Faches heraus verstehen. Dazu möchte ich in den folgenden Abschnitten 2-5 einige grundsätzliche Überlegungen zur Mathematik anstellen, die nicht gänzlich, aber doch in bedenkenswertem Maße auch auf andere Fächer übertragen werden können. In den letzten beiden Abschnitten (6,7) komme ich schließlich darauf zu sprechen, wie die TU Wien in ihrer Ausbildung von Lehrern und ich selbst als daran Beteiligter diesen Überlegungen gerecht zu werden trachten.

[1] Es versteht sich von selbst, dass mit grammatikalisch maskulinen Substantiven wie "Mathematiker", "Lehrer", "Schüler", "Mensch" etc. stets Personen beiderlei natürlichen Geschlechts gemeint sind.

2 Mathematik als eine Wissenschaft vom Menschen

Es ist ein legitimer wissenschaftstheoretischer Standpunkt, jede wissenschaftliche Disziplin, insofern sie Theoriegebäude bereitstellt, vor allem als etwas zu betrachten, das vom menschlichen Geist gemacht ist, und ihren (meist extern gegebenen) Gegenstand als im Vergleich dazu sekundär. Geht es um die Mathematik, so bedarf es aber nicht einmal einer so akzentuierten erkenntnistheoretischen Grundhaltung; die wesentliche Rolle des Menschen und seines Erkenntnisapparats liegt bereits im Gegenstand der Mathematik begründet. Denn im Gegensatz zu den empirischen Wissenschaften hat es die Mathematik mit ideellen Objekten zu tun, nicht mit realen. Dass sie dabei trotzdem von so großer Relevanz für die Realität und somit für die empirischen Wissenschaften ist, liegt daran, dass der Mensch auch dort Begriffe braucht, um sich einen Überblick zu verschaffen; auch angesichts der ihm extern gegebenen Wirklichkeit. Und stets wird er versuchen, diese Begriffe - mehr oder weniger explizit - der logischen Analyse und somit auch der Mathematik zugänglich zu machen.

Jede Wissenschaft vermittelt also einerseits zwischen einer zunächst nur über unsere Sinne in Erscheinung tretenden Realität (wie weit wir an ihre objektive, vom Menschen unabhängige Existenz glauben, ist hier sekundär) und andererseits unseren intellektuellen Möglichkeiten, unseren Sinneseindrücken Struktur zu geben, etwa im Rahmen der Kategorien Raum, Zeit, Kausalität etc.

Innerhalb dieser Vermittlung ist die Rolle der Mathematik besonders nahe beim Menschen angesiedelt. Denn ihr geht es um sehr allgemeine Strukturen unserer kognitiven Inhalte, die ihrerseits stets Formen spezifisch menschlichen Denkens sind. Zahlen und geometrische Formen etwa spielen nicht nur in unserem wissenschaftlichen Denken eine wichtige Rolle, sie beherrschen auch bedeutende Aspekte unserer alltäglichen Wahrnehmung; und das, obwohl in einer naiv verstandenen empirischen Wirklichkeit beispielsweise weder eine Zahl an sich auftritt noch ein idealer Kreis. Viel mehr ist es eine für den Menschen typische Abstraktionsleistung, angesichts einer Menge von 17 Äpfeln einen abstrakten Begriff 17 zu bilden, der ebenso z.B. mit einer Gruppe von 17 Personen zu tun hat, oder angesichts einer kreisähnlichen ebenen Figur die (ideale) Menge aller Punkte, die von einem Mittelpunkt einen festen Abstand haben. Interessant in diesem Zusammenhang sind auch Erkenntnisse der Neurowissenschaften, wie sie in deutscher Übersetzung etwa in [2] dargelegt werden.

Indem sich die Mathematik im Laufe ihrer langen Geschichte mit gewissen idealen Objekten besonders intensiv beschäftigt hat, hat sie diese ausgewiesen als zentral für das menschliche Denken und Erkenntnisvermögen. Abstraktion spielt dabei eine wesentliche Rolle, weil nur sie jene Denkökonomie schafft, die es uns ermöglicht, Ideen, die wir schon einmal gedacht haben, auch in anderer Einkleidung wiederzuerkennen und so unseren Erkenntnissen Nachhaltigkeit zu geben. Mathematik handelt in ihrem Kern also von Ideen, und Ideen sind Leistungen des menschlichen Bewusstseins. Hier wird ein wesentlicher Aspekt der Didaktik wirksam.

3 Didaktik und Bewusstseinserweiterung

Aus dem bisher Gesagten folgt, dass es die Mathematik mit bestimmten Inhalten des menschlichen Bewusstseins zu tun hat, Didaktik der Mathematik folglich mit der Vermittlung von Bewusstseinsinhalten. Man beachte folgende Unterscheidung: Natürlich spielt bei jeder Form von Didaktik das Bewusstsein eine zentrale Rolle. Im Falle der Mathematik sind die Inhalte aufgrund von Abstraktion und Idealisierung aber geradezu maßgeschneidert für das menschliche Bewusstsein, weil sie - anders als Objekte der empirischen Realität - dort sogar ihren Ursprung haben. In diesem Lichte ist auch der Titel des vorliegenden Textes zu verstehen.

Etwas konkreter gesprochen: Didaktisch gelungene Mathematikvermittlung ist in extremem Maße an fachlich adäquate Darstellung gekoppelt. Fachliche Unstimmigkeiten in der Vermittlung von Mathematik besitzen in den allermeisten Fällen auch keine didaktische Rechtfertigung. Was als sogenannte Eselsbrücke das Gedächtnis scheinbar unterstützen mag, führt, sofern es falsche Zusammenhänge suggeriert, in die Irre und erweist sich für ein nachhaltiges Verständnis schlussendlich als kontraproduktiv. Im Gegensatz zu solch echten Unstimmigkeiten wende ich mich keinesfalls gegen etwas vergröberte Darstellungen mathematischer Sachverhalte, wo durchaus gewisse Details ignoriert werden dürfen, sofern wesentliche Ideenstränge dadurch besser verdeutlicht werden können.

Sind Fachwissenschaft und Didaktik somit als untrennbar miteinander verflochten erkannt, darf nicht nur vom Mathematikdidaktiker hohe Fachkompetenz eingefordert werden, sondern umgekehrt auch vom Fachmathematiker großes didaktisches Bemühen. Und tatsächlich werden jedem Mathematiker spontan zahlreiche Beispiele höchst angesehener Fachwissenschaftler einfallen, die gleichzeitig auch aufgrund einer didaktisch besonders vorbildhaften Darstellung ihrer Arbeit herausragen. Es stellt sich die Frage, warum es trotzdem auch Ausnahmen zu dem von mir allgemein postulierten Zusammenhang gibt. Ich will keinesfalls behaupten, alle möglichen Begründungen zu kennen. Ich will aber wenigstens eine vorschlagen, die ich für relevant und lehrreich halte.

4 Der Mathematiker als Herr im eigenen Haus?

Ich habe erklärt, inwiefern Vermittlung von Mathematik zu verstehen ist als Vermittlung von Bewusstseinsinhalten. Die Frage, wie es mit der Bewusstheit dieser Bewusstseinsinhalte selbst steht, erscheint nur auf einen ersten, oberflächlichen Blick müßig. Denn wie uns - um zunächst innerhalb der Mathematik zu bleiben - sogar die mathematische Logik lehrt, ist bei einem allzu sorglosen Umgang mit der Sprache Vorsicht angebracht, insbesondere wenn verschiedene syntaktische und semantische Ebenen durcheinander zu geraten drohen. Darüber hinaus scheint es mir legitim, Erklärungshilfe noch von ganz anderer Seite zu bemühen: Sigmund Freud und der neue Blick auf den Menschen, für den sein Name steht, haben uns gelehrt, dass keineswegs alle geistig-psychischen Kräfte, die uns treiben, uns auch unmittelbar bewusst sein müssen. Wir sind also, wie sich Freud ausdrückte, nicht gänzlich Herr im eigenen Haus. Meine These besteht nun darin, dass in ähnlicher Weise Mathematiker nicht immer gänzlich Herr über ihre eigenen Gedanken sind. Besonders gilt dies, wenn es um das Verhältnis von Intuition und explizitem Wissen geht. Vermutlich ist Mathematikern oft nicht einmal bewusst, in welcher Gestalt mathematische Ideen ihr Bewusstsein heimsuchen. Als eine häufige Ursache dafür erscheint mir der Umstand, dass in der Mathematik die Symbolsprache eine besonders mächtige Rolle spielt. Fraglos ist die Symbolsprache nützlich und in vielerlei Hinsicht unverzichtbar, weil sie eine extreme Verdichtung von Information ermöglicht. Indem die Operation mit quasi gewichtigen mathematischen Objekten ersetzt wird durch eine mit schwerelosen Zeichen, wird die Kommunikation zwischen Mathematikern maßlos erleichtert. Gleichzeitig kann die Leichtgängigkeit der Symbolsprache aber auch einen trügerischen Charakter annehmen. Sehr bequem ist es nämlich für den Mathematiker, die Symbole nur mehr für sich und nicht mehr für die dahinter stehenden Gedanken und Ideen sprechen zu lassen. Mag sein, dass der Mathematiker selbst nicht diesem Missverständnis aufsitzt und für ihn die Symbolsprache so beredt ist, dass er mit ihr die eigentlichen Ideen in ihrer originalen Form mitdenkt. Für den vielleicht weniger versierten Zuhörer oder Leser ist aber oft nur mehr die äußere Form der Symbole wahrnehmbar. (Ein typisches Beispiel dafür ist die oft anzutreffende Verwechslung einer Zahl mit ihrer dekadischen Zifferndarstellung. Die Zeichenfolge bestehend aus den Ziffern "1" und "7" etwa ist nicht identisch mit dem mathematischen Objekt, das sie bezeichnet, nämlich mit der Zahl 17.) Bei der Vermittlung von Mathematik geht es primär darum, den Kern mathematischer Ideen möglichst unverfälscht von Bewusstsein zu Bewusstsein zu übertragen. Die Übersetzung in symbolische oder andere Verkleidungen sollte daher möglichst (Einschränkungen siehe Abschnitt 5) erst in einem nachfolgenden Schritt erfolgen.

Wir stehen also vor dem didaktischen Anliegen, den Kern einer mathematischen Idee zu begreifen und von symbolischen Einkleidungen zu unterscheiden. Hierzu ist erstens tiefe fachliche Einsicht erforderlich und zweitens die Fähigkeit zur glasklaren Selbstbeobachtung. Mit letzterer können nämlich Vorgänge wie die oben beschriebenen symbolischen Verschleierungen auch in konkreten Situationen besser durchschaut werden. Die beiden genannten Fähigkeiten kommen sowohl dem Fachmathematiker als auch dem Didaktiker zugute. Bei schlechtem Mathematikunterricht fehlen meist beide Kompetenzen. Dennoch sind damit sicher noch nicht alle entscheidenden Qualitäten guter Mathematiklehrer erfasst. Wenigstens auf eine dritte will ich hier noch eingehen.

5 Vielfältige Ansichten mathematischer Ideen

Oben habe ich von gewissen (symbolischen) Einkleidungen mathematischer Ideen gesprochen, die dem Anfänger den Blick aufs Wesentliche erschweren, also sehr vorsichtig zu dosieren sind. Natürlich ist umgekehrt eine Einkleidung didaktisch höchst wertvoll, wenn dem Lernenden eine mathematische Idee in ihrer abstrakten Form neu, in der Einkleidung aber bereits vertraut ist. Dann wäre es töricht, im Unterricht nicht dieses Vorverständnis zu nutzen und damit den Weg zu tieferer Einsicht auch in abstraktere Zusammenhänge zu erleichtern. Es geht also darum, Verbindungen herzustellen zwischen verschiedenen Inseln des Wissens, um auf diesem Wege den Transfer von Verständnis zu fördern. In der Mathematik spielen derartige Verbindungen eine besonders wichtige Rolle. Denn im größeren Rahmen geht es um die Ideen nicht nur als Selbstzweck, sondern vor allem um ihre Manifestationen in unterschiedlichen Kontexten. Noch mehr als um die Ansammlung wesentlicher mathematischer Ideen (gar so viele gibt es davon gar nicht!) geht es im Mathematikunterricht daher um die Herstellung von Zusammenhängen, in denen die Ideen auftreten, d.h. um deren Kontextualisierung.

In offensichtlicher Weise fallen darunter klassische Anwendungen der Mathematik in Naturwissenschaften, Technik, Sozial- und Wirtschaftswissenschaften. Sie sind nicht nur als Motivation wirksam, indem sie die Nützlichkeit der Mathematik dokumentieren. Weil sie allfällige Kenntnisse aus anderen Bereichen hilfreich für das Verständnis abstrakterer mathematischer Inhalte nutzbar machen, geht der Nutzen auch umgekehrt von den Anwendungen in Richtung Mathematik. Nicht weniger wichtig sind interdisziplinäre Verbindungen zu Philosophie, Geisteswissenschaften, Kunst etc., auch wenn diese weniger wegen ihrer praktischen Nützlichkeit als aus ideengeschichtlichen Gründen interessieren. Weniger im allgemeinen Bewusstsein verankert, für den tatsächlichen Mathematikunterricht aber vielleicht noch wichtiger sind innermathematische Kontextualisierungen. Denn in den allermeisten Situationen kann bei entsprechendem fachlichen Überblick des Lehrers der Zugang zu neuen Stoffkapiteln wesentlich erleichtert werden, wenn Verbindungen zu bereits Bekanntem genutzt werden. Dies kann Nachbargebiete betreffen wie auch Übertragungen zwischen einem elementaren und einem fortgeschrittenen Niveau.

Vergleicht man ein Lehramtsstudium mit einem reinen Fachstudium, so muss daher weniger der Ausweitung des Lehrstoffes Priorität gegeben werden als der dichten Vernetzung des bestehenden Stoffes nach innen und außen. Dem soll ein Projekt gerecht werden, das in den letzten Jahren an der TU Wien intensiv diskutiert wird.

6 Initiativen zum Lehramt an der TU Wien

In öffentlichen Diskussionen wird seit geraumer Zeit immer deutlicher, dass es in Österreich einer Weiterentwicklung des gesamten Bildungssystems bedarf. Insbesondere in den sogenannten MINT-Fächern Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik, so ein weitreichender Konsens, braucht unser Land mehr qualifizierte Fachleute. Deren Ausbildung fällt in hohem Maße den Technischen Universitäten zu, weshalb diese besonderes Interesse an einer soliden Schulbildung ihrer Studierenden und folglich an einer erstklassigen Lehrerausbildung haben. Bestimmte Defizite in der Schulmathematik werden in den technisch-naturwissenschaftlichen Studien sogar noch deutlicher spürbar als im mathematischen Fachstudium. Denn letzteres zieht vorwiegend mathematische Spezialbegabungen an, die sich als solche in (fast) jedem Fall durchsetzen. Dort, wo Mathematik als Instrument auftritt, kommt es hingegen zu besonders unangenehmen Beeinträchtigungen des Studienfortschritts, sofern aus der Schule eine falsche Herangehensweise an die Mathematik mitgebracht wird. Zur Erläuterung, was ich persönlich unter einer richtigen Herangehensweise verstehe, verweise ich z.B. auch auf [9]. Hier will ich lediglich betonen, dass die diesbezüglichen Bedürfnisse und Wünsche einer Technischen Universität keineswegs im Widerspruch stehen zu Bildungszielen, die sich unter humanistischen Gesichtspunkten oder auch aus Sicht der Gesellschaft als ganzer ergeben.

So hat beispielsweise die TU München mit ihrer “School of Education” sogar eine eigene Fakultät samt Forschungsinstitutionen für die Lehrerausbildung eingerichtet. Doch auch an der TU

Wien wurde auf Anregung des Vizerektors für Lehre eine Arbeitsgruppe aktiv, die an einem innovativen Konzept für die an der TU Wien vertretenen Lehramtsfächer Mathematik, Informatik, Darstellende Geometrie, Physik und Chemie arbeitet. Und zwar sind zwei Studienrichtungen konzipiert, die jeweils drei Fächer in einer sehr stringenten und effizienten Weise kombinieren, wobei Mathematik in beiden Zweigen vorkommt: M-DG-Inf und M-Ph-Ch.

Durch die festen Kombinationen ist es möglich, von Natur aus eng verwandte Fächer wesentlich besser aufeinander abzustimmen, als dies bei freien Fächerkombinationen wie bisher der Fall war. Deshalb ist es auch möglich, drei statt nur zwei Fächer zu kombinieren. Gleichzeitig kann dadurch dem weiter oben geforderten Primat von Interdisziplinarität und größeren Zusammenhängen entsprochen werden. Auch auf die mathematikinternen Verbindungen soll durch entsprechende Lehrveranstaltungen speziell Rücksicht genommen werden, indem Stoffgebiete unter thematisch verschiedenen Gesichtspunkten und von unterschiedlichem Niveau aus betrachtet wiederkehren. Dabei darf Lehreraus- und -weiterbildung nicht den Fehler begehen, Schulunterricht einfach zu simulieren. Schließlich unterscheiden sich die Adressaten hinsichtlich Lebensalter, Hintergrundwissen, Motivationslage und Ausbildungsziel. Lehrer stellen aber das wichtigste Bindeglied dar zwischen Wissenschaft und Breitenbildung. Auch im Sinne des Zusammenhalts der gesamten Gesellschaft kommt dieser Vermittlerrolle eine herausragende Bedeutung zu.

Die Diskussion um die Rahmenbedingungen der zukünftigen Lehrerausbildung in Österreich ist noch im Gange, und es ist zu hoffen, dass die bisher an der TU Wien erarbeiteten Ansätze in der einen oder anderen Form umgesetzt werden können.

7 Zum Schluss der Hinweis auf einige persönliche Beiträge

Am Ende meiner Ausführungen darf ich Bemühungen meinerseits erwähnen, die sich z.B. in einigen Artikeln in den Didaktikheften der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft niedergeschlagen haben. Sie sind im Internet unter

`http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html`

oder auch (neben anderen einschlägigen Texten) auf meiner Publikationsliste (PL) unter

`http://tuwien.dmg.ac.at/winkler/pub`

verfügbar. Im Zentrum stehen etwa scheinbar elementare Themen wie die natürlichen ([7], PL 44) oder die die reellen Zahlen ([8], PL 47), die von einem höheren Niveau aus behandelt werden. Damit soll der Blick für interessante Querverbindungen und Vertiefungen geöffnet werden. In einem Artikel über Maßtheorie ([12], PL 57) setze ich die Integralrechnung, die üblicherweise als eines der letzten und höchsten Ziele des Schulstoffs erscheint, in Verbindung mit elementaren Zugängen zum Messen, die ihrerseits zu vergleichsweise tiefen mathematischen Fragen führen. In einem geplanten Artikel ([13]) möchte ich - als Beispiel für den Reichtum innermathematischer Querverbindungen - darlegen, wie man ausgehend allein von der Exponentialfunktion in natürlicher Weise einen beträchtlichen Teil des Schulstoffs erschließen kann. Mein Artikel über das Paradoxon von Banach-Tarski ([5], PL 29), stellt einen Versuch dar, ein scheinbar sehr anspruchsvolles Thema so weit in verdauliche und dennoch auch für sich interessante Einzelschritte zu zerlegen, dass es interessierten Schülern zugänglich gemacht werden kann. In einem Artikel beschäftige ich mich mit gewissen logischen und mengentheoretischen Grundlagen, insofern sie für den Schulunterricht wichtig sind ([10], PL 53), und in "Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht" ([6], PL 40) gebe ich unter dem durch diesen Titel beschriebenen Gesichtspunkt einen Streifzug durch substantielle Teile der für den Schulunterricht relevanten Algebra, von den Grundrechnungsarten bis zu faktoriellen Ringen. Eine ausführlichere Darlegung meiner Haltung zur Philosophie der Mathematik schließlich, wie sie dem vorliegenden Text zugrunde liegt, ist in [11] nachzulesen.

Literatur

[1] Blömeke, S. *Kompetenzentwicklung in der Leher/innenbildung: Möglichkeiten und Grenzen.* `http://www.oefg.at/text/veranstaltungen/professionalisierung/Beitrag_Bloemeke.pdf` (2011).

[2] Dehaene, S. *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können.* Basel: Birkhäuser (1999).

[3] Neuweg, G.H. *Das Wissen der Wissensvermittler. Problemstellungen, Befunde und Perspektiven der Forschung zum Lehrerberuf.* In Ewald Terhart, Hedda Bennewitz und M.Rothland (Hrsg.), Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf. Münster/New York/München/Berlin: Waxmann (2011), 451-477.

[4] Neuweg, G.H. Lehrer/innenbildung in Österreich: Bestandsaufnahme und Empfehlungen. `http://www.oefg.at/text/veranstaltungen/professionalisierung/Beitrag_Neuweg.pdf` (2011).

[5] Winkler, R. *Wie macht man 2 aus 1? Das Paradoxon von Banach-Tarski*, Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 33 (2001), 166-196.

[6] Winkler, R. *Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht*, Didaktikhefte der ÖMG, Heft 39 (2007), 155-165.

[7] Winkler, R. *Wir zählen bis drei - und sogar darüber hinaus*, Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 40 (2008), 129-141.

[8] Winkler, R. *Die reellen Zahlen sind anders*, Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 41 (2009), 140-153.

[9] Winkler R. *Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht durch Förderung der Phantasie.* In Professionalität und Professionalisierung. Einige aktuelle Fragen und Ansätze der universitären LehrerInnenbildung Hrsg.: Ilse Schrittesser. ISBN: 978-3-631-56393-9. Peter Lang GmbH Internationaler Verlag der Wissenschaften. Frankfurt am Main (2009), 179-205.

[10] Winkler, R. *Logischer und mengentheoretischer Formalismus - Ärgernis, und sonst nichts?*, Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 42 (2010), 102-117.

[11] Winkler, R. *Der Organismus der Mathematik; mikro-, makro- und mesoskopisch betrachtet.* In Markus Helmerich, Katja Lengnink, Gregor Nickel und Martin Rathgeb (Hrsg.), Mathematik verstehen - philosophische und didaktische Perspektiven Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag (2011), 59-70.

[12] Winkler, R. *Das Maß aller Dinge aus mathematischer Sicht*, Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 43 (2011), 146-160.

[13] Winkler, R. *Im Anfang war die Exponentialfunktion*, soll erscheinen in: Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 44 (2012).