Internat. Math. Nachrichten
Nr. 237 (2018), 27–58

Zentralmatura in der Sackgasse?

Reinhard Winkler
TU Wien

Der vorliegende Artikel schließt an den vor zwei Jahren entstandenen Vorläufer [7] mit dem Titel „Zentralmatura – quo vadis?“ an, eine Auseinandersetzung mit Chancen und Gefahren im Zusammenhang mit der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung („Zentralmatura“) an Österreichs Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS). Ich vermute, dass für die Berufsbildenenden Höheren Schulen, kurz BHS, mutatis mutandis Ähnliches gilt und deshalb eine analoge kritische Diskussion auch dort wünschenswert wäre, doch bin ich mit der BHS weit weniger vertraut und gehe deshalb nicht näher auf sie ein.

War [7] vor allem an die Lehrerschaft gerichtet, so wende ich mich diesmal an die ÖMG und die gesamte mathematische Gemeinschaft in Österreich. Prolog und Epilog sollten auch für Nichtmathematiker verständlich sein. Im Vergleich zu [7] gibt der Lauf mancher Entwicklungen bzw. noch mehr der Stillstand in anderen Belangen mittlerweile Anlass zu einer deutlich kritischeren Haltung.

Unter Mathematikern hoffe ich auf Unterstützung bei meiner in Kapitel 2 ausführlich begründeten Kritik, vor allem am Katalog der 73 sogenannten Grundkompetenzen. Erstens droht der Mathematikunterricht immer mehr auf dieses Subminimalprogramm reduziert zu werden. Zweitens weist der vorliegende Katalog zahlreiche fachliche Mängel auf, die bestenfalls als pragmatische Übergangslösung für ein, zwei Jahrgänge hinzunehmen gewesen wären, geboren aus der Notwendigkeit, am Status quo anzusetzen. Als immerwährender Kanon des Schulfachs Mathematik, als welcher der Katalog von Lehrenden und Lernenden in der Praxis immer mehr anerkannt zu werden scheint, erweist er sich aus mathematischer Sicht jedoch als unzulänglich.

In Kapitel 2 als Hauptteil steht die Besprechung zahlreicher konkreter Mängel des Katalogs im Zentrum. Das nimmt auch mehr als die Hälfte des gesamten Textes in Anspruch. Voraus geht dem Hauptteil ein Prolog (Kapitel 1), in dem u.a. das Problematische an der übermächtigen Rolle eines Katalogs von Grundkompetenzen unabhängig von einzelnen Unzulänglichkeiten behandelt wird. Im Epilog (Kapitel 3) werden allgemeine Schlüsse aus dem Vorangegangenen gezogen, Erkenntnisse zusammengefasst und notwendige Schritte formuliert.

ISSN 0020-7926

1 Prolog

Im Prolog rekapituliere ich zunächst in 1.1 triftige Gründe für die vor einigen Jahren erfolgte Umstellung der österreichischen Reifeprüfung, die ich an sich für einen wichtigen und begrüßenswerten Schritt halte. In 1.2 diskutiere ich die Rolle des Grundkompetenzkatalogs (GKK), um den es auch im Hauptteil gehen wird, in 1.3 die Verantwortung der mathematischen Gemeinschaft in Österreich für eine kritische Auseinandersetzung damit. Der Prolog schließt in 1.4 mit einem kurzen Überblick über den Rest des Artikels.

1.1 Systemumstellung an Österreichs Höheren Schulen

Seit einigen Jahren gibt es an Österreichs Höheren Schulen eine neue Form der Reifeprüfung, die ich, dem allgemeinen Sprachgebrauch folgend, einfach *Zentralmatura* nennen möchte. Im Fach Mathematik[1] war diese Reform höchst an der Zeit und wurde von großen Teilen der Öffentlichkeit, von Bildungsexperten wie auch den meisten Mathematikern an Österreichs Universitäten begrüßt. Denn schwerwiegende Mängel des bisherigen Systems waren nicht zu übersehen: Lehrerinnen und Lehrer stellten einige wenige Prüfungsaufgaben für die eigene Klasse zusammen und legten sie einer Zentralstelle vor. Oft waren diese Aufgaben beeindruckend kompliziert; schließlich will man der Prüfungsaufsicht ja zeigen, was man seinen Schützlingen alles beigebracht hat. Die Bildungsbehörde wählte davon vier Aufgaben für die schriftliche Matura aus. So genügte es aus Sicht der Lehrenden, sich bei der Maturavorbereitung auf die paar Aufgabentypen, die infrage kamen, zu konzentrieren und alles andere beiseite zu lassen. Aus der Perspektive der Schüler war es, sofern man inhaltlich nichts verstand, eine erfolgversprechende Strategie, den Drill für wenige Wochen brav mitzumachen. Dann konnte man sicher sein, bei der Abschlussprüfung erfolgreich abzuschneiden, auch ohne irgendetwas Relevantes aus dem Fach Mathematik mitgenommen zu haben. Auch den Lehrenden kann man es nicht verargen, wenn sie genau diesen Drill boten, um nicht junge Menschen, die ihnen bis zu acht Jahre lang persönlich ans Herz gewachsen waren, in ein Prüfungsdesaster laufen zu lassen. Es geht mir bei meiner Kritik generell nicht darum, Personengruppen oder gar Einzelpersonen die Schuld an einem Systemversagen zuzuweisen, sondern nach Ansatzpunkten Ausschau zu halten, wo das System verbessert werden kann.

[1] Ich beziehe mich in diesem Artikel auf die AHS. In den „Berufsbildenden Höheren Schulen“ (BHS) heißt das Fach „Angewandte Mathematik“. Ein Jahr später als in den AHS wurde auch in den BHS eine Zentralmatura eingeführt. Ich sehe keinen Grund für einen grundsätzlich anderen Befund als für die AHS. Allerdings gibt es für die BHS-Matura meines Wissens nicht einmal ein bildungstheoretisch fundiertes Grundkonzept, das sich mit jenem von Fischer/Peschek für die AHS vergleichen ließe. Insofern müsste man bei einer Analyse vermutlich sogar schon auf einer grundsätzlicheren Ebene ansetzen. Außerdem schafft die Vielfalt verschiedener BHS-Typen weitere zusätzliche Komplikationen.

Die Einführung der Zentralmatura gab Anlass zur Hoffnung, dass es mit den geschilderten Missständen ab nun ein für alle Mal vorbei sein werde. Denn die Lehrenden sind beim schriftlichen Teil nicht mehr gleichzeitig die Prüfenden (wenn auch die Korrigierenden) und kennen die Prüfungsaufgaben nicht im Voraus. Folglich müssen sie im Unterricht zur Prüfungsvorbereitung nicht nur wenige Typen von Aufgaben abdecken, sondern den ganzen Lehrstoff im Auge haben. – Wirklich den ganzen Lehrstoff? Natürlich nicht den *ganzen*! Aber was genau?

Um das zu klären, wurde ein Dokument erstellt (siehe [1]), das den Titel „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“ trägt und auf der Internetseite des Bundesministeriums zu finden ist. Präzisierend liest man im Untertitel „Inhaltliche und organisatorische Grundlagen ...“. Auf dieses Dokument werde ich mich im Folgenden beziehen, und zwar auf die seit geraumer Zeit gültige Version mit dem Zusatz „gültig für alle Schüler/innen, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren (Stand: Oktober 2015)“. Weil der Kerninhalt dieses Dokuments die 73 sogenannten Grundkompetenzen (kurz GKen) sind, werde ich es den Grundkompetenzkatalog, kurz GKK, nennen.

1.2 Die Not des Augenblicks sub specie aeternitatis

Viel Erfahrung aus der Schulpraxis ist in den GKK eingeflossen, und die Autoren haben sich allem Anschein nach große Mühe gegeben, das gesamte System – wie es so schön heißt – inhaltlich „dort abzuholen“, wo es sich zum Zeitpunkt der Umstellung befand. Das war auch unerlässlich. Denn allein die organisatorischen Umstellungen forderten den Lehrenden, den Lernenden, der Schulbehörde und den Eltern so viel Kooperationsbereitschaft und guten Willen ab, dass ihnen zum Zeitpunkt der Umstellung nicht auch noch inhaltliche Innovationen zugemutet werden konnten. So weit das ein in Bezug auf das Schulsystem außenstehender Mathematiker beurteilen kann, wurde der GKK behutsam an den Status quo dessen angepasst, was landläufig „Schulmathematik“ genannt wird. Mit diesem Wort scheinen schlicht die real existierenden Zustände im Zusammenhang mit dem Unterrichtsfach Mathematik an Österreichs Schulen gemeint zu sein. Man kann den GKK demnach als ein Produkt betrachten, das aus der Not des Augenblicks der Systemumstellung geboren ist und als solches in der Phase des Übergangs seine wertvollen, ja unverzichtbaren Dienste geleistet hat. Wer (so wie ich) in der Phase dieser Umstellung eine Zeit lang in der sogenannten Steuergruppe des Projekts AHS-Zentralmatura mitarbeitete, litt unweigerlich an den unübersehbaren Mängeln des durch den GKK eingefangenen Status quo, musste aber die pragmatische Notwendigkeit einsehen, von dieser Basis aus zu starten.

Wenn man jemanden dort abholt, wo er sich befindet, sollte es aber auch ein Ziel geben, wohin man ihn oder sie begleiten möchte. Denn andernfalls wäre das Abholen ja überflüssig gewesen. Entsprechend war die Maturareform mit dem Anspruch angetreten, den Status quo zu verbessern und nicht einzuzementieren. Gemeinsam mit Kollegen machte ich deshalb unzählige Vorschläge, wie der GKK weiterentwickelt werden könnte und welche Begleitmaßnahmen, etwa den Lehrplan betreffend, sinnvoll wären. Da es verständlicherweise Unruhe vor allem bei der Lehrerschaft erzeugt hätte, wenn der GKK, scheinbar erratisch, alle paar Wochen aktualisiert worden wäre, fand ich mich damit ab, dass gut Ding Weile brauche und Revisionen langfristig geplant werden müssten. Auch sollten inhaltliche Verbesserungen an der Wurzel angegangen werden. Folglich sollte man sich mit der Implementierung lieber ein, zwei, ja meinetwegen fünf Jahre Zeit nehmen, als durch unüberlegte Schnellschüsse Verwirrung und womöglich Chaos zu erzeugen. Klar – so meine Überzeugung – müsse vor allem für die Lehrenden an Österreichs Schulen jedenfalls sein, dass mittelfristig GKK, Lehrplan und (unverzichtbar!) auch noch andere Rahmenbedingungen weiterentwickelt würden und man sich darauf einzustellen habe.

Doch leider: Seit mittlerweile ein paar Jahren ist weit und breit keine Initiative für eine notwendige tiefgreifende Revision der inhaltlichen, d.h. mathematischen Festlegungen im GKK auszumachen. Ich möchte betonen, dass ich für dieses Versäumnis keinesfalls jenes Team verantwortlich machen möchte, das mit der laufenden Abwicklung der Zentralmatura befasst ist. In der Steuergruppe durfte ich erleben, wie aktuelle Erfordernisse dem operativen Geschäft fast permanente Feuerwehreinsätze abverlangen. Grundlegende inhaltliche Revisionen müssten einer eigens einzusetzenden Arbeitsgruppe mit starker fachwissenschaftlicher Beteiligung und langfristiger Arbeitsperspektive übertragen werden.

In der schulischen Realität bedeuten die kritisierten Versäumnisse: Der aus der Not des Augenblicks entstandene GKK wird zur ehernen Grundlage und unveränderlich eingefrorenen Heiligen Schrift, die dogmatisch festlegt, was bis zum Jüngsten Gericht, sozusagen *Sub Specie AEternitatis* (mit der Abkürzung SSAE werde ich gelegentlich an diesen Gesichtspunkt erinnern) unter „Schulmathematik“ zu verstehen sei. Lehrplan, Bildungsstandards und alle hehren Bildungsziele treten in den Hintergrund, der Mathematikunterricht wird allein von den 73 GKen im GKK bestimmt. Dieser Eindruck wird sowohl durch Äußerungen Betroffener bestätigt wie auch durch Beobachtungen, die Außenstehenden möglich sind, sofern sie fachkundig sind und hin- statt wegschauen.

1.3 Unsere Verantwortung

Wer, wenn nicht wir Mathematikerinnen und Mathematiker, trägt die Verantwortung, auf die rein *fachlichen* Mängel hinzuweisen, die sich in der „Schulmathematik“ als Traditionen festgesetzt haben und an denen einzelne Lehrerinnen und Lehrer, wollen sie nicht anecken, kaum zu rütteln wagen? Das Selbstbewusstsein, den eigenen Zweifeln mehr zu trauen als kollektiv eingefahrenen Gewohnheiten, ist nicht jedermanns Sache, und man kann es von den Unterrichtenden, die ja den Schulbehörden unterstellt sind, nicht einfordern.

Es gilt auszusprechen, was in fachmathematischen Kreisen bereits als Selbstverständlichkeit gilt, woran sich sonst anscheinend aber kaum mehr jemand stößt: Die fachliche Substanz und Nachhaltigkeit des tradierten Mathematikunterrichts an unseren Schulen ist, gelinde gesagt, verbesserungswürdig. Der GKK stellt eine Momentaufnahme des Status quo dar, die als aus der Not des Augenblicks geborene Orientierungshilfe für die Zentralmatura notwendig war. Betrachtet man den GKK aber als langfristig prägende Vorgabe (SSAE), ist er nicht nur mangelhaft, sondern strotzt geradezu vor mathematischen Fragwürdigkeiten. Angesichts des Gleichmuts, mit dem das in der Schulpraxis nicht nur hingenommen, sondern geradezu gepflegt wird, fragt man sich, ob man sich in der Gemeinschaft jener, die sich für „Schulmathematik" verantwortlich fühlen, des Ausmaßes der Schwächen bewusst ist. Mit diesem Artikel versuche ich, etwas dazu beizutragen.

Wer wie ich vorwiegend an einer Universität wirken darf, hat, so vermute ich, ein nur sehr unvollständiges Bild von den mannigfachen Nöten, unter denen man im Schulsystem je nach Position zu leiden hat. Nur so kann ich mir erklären, warum man dort an vielem, nie aber an fachlichen Mängeln Anstoß nimmt, obwohl diese wirklich unübersehbar und höchst schmerzhaft sind. Umso mehr liegt es an uns „Hochschulmathematikern", diese Mängel aufzuzeigen. Ich habe das zwar schon vielfach und gegenüber unterschiedlichen Personengruppen getan. Meine Stimme ist aber zu leise. So wende ich mich in diesem Artikel zunächst an die ÖMG und hoffe auf Unterstützung und Verstärkung durch meine Kollegenschaft, wo immer sich die Gelegenheit dazu ergibt. In diesem Sinn bin ich ausdrücklich dankbar für jede Rückmeldung, die mir Mut gibt, meine Bemühungen fortzusetzen. Gemeinsam können wir vielleicht doch etwas ausrichten.

1.4 Überblick über das Folgende

So wie in der gegenwärtigen „Schulmathematik" an der AHS, steht auch im vorliegenden Artikel der GKK im Zentrum. Im Hauptteil (Abschnitt 2) werde ich zahlreiche der darin enthaltenen GKen kritisch besprechen. Je nach Zählweise kommen von den 73 GKen im GKK zwischen einem Viertel und einem Drittel explizit kritisch zur Sprache. Dabei entsteht, so denke ich, ein durchaus repräsentatives Bild vom Stoff, der durch den GKK abgedeckt wird bzw. abgedeckt werden soll. Dem Urteil der Leserin und des Lesers seien Antworten auf folgende Fragen anheimgestellt: Welche Note gäbe es auf eine Schularbeit, in der etwa 30% des Gebotenen angreifbar ist? Und welche Note verdient (SSAE) ein österreichweit verbindlicher Kompetenzkatalog mit den Schwächen des vorliegenden GKK?

Nach der Besprechung des GKK in seinen mathematischen Einzelheiten werde ich in einem Epilog (Kapitel 3) noch weitere, teils allgemeinere Aspekte anschneiden und grundsätzliche Überlegungen anstellen.

2 Der Grundkompetenzkatalog GKK

Das Kapitel über den GKK stellt den Hauptteil des vorliegenden Artikels dar. Ich habe bereits angedeutet, warum der GKK auf die Praxis des Mathematikunterrichts einen überwältigenden Einfluss ausübt. Deshalb muss eine Beurteilung der Zentralmatura insgesamt eine kritische Auseinandersetzung mit dem GKK beinhalten, die auch ins fachliche Detail geht. Eine solche soll nun folgen.

Da es nicht um mathematische Theoreme geht, sondern um die Beurteilung von mehr oder weniger gelungen formulierten „Kompetenzen“, die von Maturanten in Mathematik erwartet werden, fließen unweigerlich persönliche Einschätzungen ein, die hie und da vielleicht auch Widerspruch ernten. Auch einzelne Irrtümer meinerseits bei der Einschätzung der Intentionen sind nicht nur möglich, sondern sogar wahrscheinlich. Dass aber jedenfalls eine fachmathematische Diskussion über den GKK höchst an der Zeit ist, dem wird man, wie ich meine, schwerlich widersprechen können. Mit meinem Text verbinde ich die Absicht, eine solche Diskussion anzukurbeln.

Die ausführliche Besprechung des GKK beginnt mit allgemeinen Bemerkungen zu seiner Struktur (2.1), gefolgt von Abschnitten, die den vier Inhaltsbereichen des GKK entsprechen: Algebra und Geometrie (2.2), Funktionale Abhängigkeiten (2.3), Analysis (2.4) sowie Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (2.5).

2.1 Allgemeines

Der GKK (siehe [1]) hat insgesamt 35 Seiten. Davon geht es auf den ersten fünf Seiten um inhaltliche Grundlagen des Konzepts von Roland Fischer und Werner Peschek, die ihrerseits stark von Fischers bildungstheoretischen Untersuchungen geprägt sind. Die letzten 17 Seiten des GKK wiederum enthalten begleitende Informationen über außermathematische Kontexte, Einheiten und Größen, Rahmenbedingungen, Antwortformate und zum Beurteilungsschema. Dazwischen bleiben somit asketische 13 Seiten für die 73 GKen im eigentlichen Sinn, auf die sich der Mathematikunterricht zunehmend konzentriert (SSAE) – wir werden ausreichend Beispiele kennenlernen. Die Formulierungen der einzelnen GKen nehmen jeweils ein bis vier Zeilen in Anspruch. Zwischen den GKen gibt es gelegentlich Anmerkungen, außerdem einleitende Texte von jeweils einer halben bis ganzen Seite Länge zur bildungstheoretischen Orientierung jedes der vier „Inhaltsbereiche“, in die der Schulstoff gegliedert ist. Jeder Inhaltsbereich wird durch zwei Buchstaben abgekürzt und ist in vier bis sechs Gruppen von GKen unterteilt, die ich hier „Themenbereiche“ nennen möchte. Innerhalb der Themenbereiche sind die GKen durchnummeriert. Die vier Inhaltsbereiche sind:

Algebra und Geometrie (AG, $2+5+5+2=14$ GKen in 4 Themenbereichen)

Funktionale Abhängigkeiten (FA, $9+6+4+4+6+6=35$ GKen in 6 Themenbereichen)

Analysis (AN, $4+1+3+3=11$ GKen in 4 Themenbereichen)

Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS, $4+4+4+1=13$ GKen in 4 Themenbereichen)

Die Abkürzung AG 2.4 beispielsweise steht für die vierte GK aus dem zweiten Themenbereich „(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme" innerhalb des Inhaltsbereichs Algebra und Geometrie (AG).

Bevor wir uns den Inhaltsbereichen, ihren Themenbereichen und den GKen im Einzelnen zuwenden, sei auf eine Eigentümlichkeit der Gliederung auf der obersten Hierarchieebene hingewiesen. Mit den drei Themenbereichen AG, AN und WS sind in sehr sinnvoller Weise große und etablierte Teilgebiete der Mathematik erfasst. Im Gegensatz dazu bezeichnet FA (Funktionale Abhängigkeiten) nach meinem Verständnis kein Teilgebiet, sondern eine Querschnittsmaterie, die alle Teilgebiete der Mathematik durchzieht. Wenn wir uns in 2.3 diesem Inhaltsbereich FA ausführlicher widmen werden, wird der Eindruck entstehen, dass damit eigentlich fast nur reelle Funktionen gemeint sind, und dabei wieder solche, die einem von nur wenigen sehr speziellen Typen zuzuordnen sind. Nach üblichem Verständnis fällt der Inhaltsbereich FA also auch in die Analysis (AN). Vermutlich wurde er deshalb ausgegliedert, damit AN im Vergleich zu den anderen Inhaltsbereichen nicht zu groß würde. Natürlich berühren solch terminologische Erörterungen zunächst nur die Oberfläche. Dass es aber durchaus auch substanzielle Einwände gibt, wird sich an entsprechender Stelle zeigen.

Auch das Verhältnis zwischen Elementarem und Fortgeschrittenem verdient eine kurze allgemeine Bemerkung. An einigen Stellen werde ich kritisieren, dass die GKen zu gewissen Themenbereichen über ein sehr bescheidenes Niveau nicht hinauskommen. Damit will ich keineswegs kritisieren, dass auch relativ einfache Inhalte durch GKen repräsentiert sind, ganz im Gegenteil: Ich fände es nicht abwegig, beispielsweise auch die Ausführung von Grundrechnungsarten explizit als Maturastoff festzuschreiben. Eine Ausweitung des GKK um ganz besonders wichtige elementare Inhalte, die bisher nicht ausdrücklich erwähnt werden, hielte ich sogar für sinnvoll. Kritik am *nur* Elementaren äußere ich lediglich dann, wenn ich meine, dass Bemühungen, über das aktuelle Niveau hinauszukommen, lohnen könnten.

2.2 Inhaltsbereich „Algebra und Geometrie" (AG)

Der Inhaltsbereich AG gliedert sich in vier Themenbereiche mit insgesamt 14 GKen:

1. Grundbegriffe der Algebra (2 GKen)
2. (Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme (5 GKen)

3. Vektoren (5 GKen)
4. Trigonometrie (2 GKen)

Beginnen wir gleich mit den beiden GKen zu AG 1 unter der Überschrift „Grundbegriffe der Algebra“. Die erste lautet:

> *AG 1.1 Wissen über die Zahlenmengen* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *verständig einsetzen können*

Welches Wissen ist da genau gemeint? Soll man wissen, um welchen Typ algebraischer Struktur (im Sinn von Gruppe, Halbring, Ring, Körper, etc.) mit entsprechenden Axiomen bzw. arithmetischen Eigenschaften es sich handelt? Ist mit $\mathbb{N}$ das Induktionsprinzip verbunden, mit $\mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung, mit $\mathbb{Q}$ die Axiomatik für einen Körper, mit $\mathbb{R}$ die Vollständigkeit, mit $\mathbb{C}$ die algebraische Abgeschlossenheit? Soll man vielleicht sogar charakterisierende Eigenschaften für die Struktur jedes der fünf Bereiche formulieren können? Die offenen Fragen machen deutlich, dass hier wie an vielen anderen Stellen ausführliche Präzisierungen wünschenswert wären. Das würde den knappen Rahmen des GKK natürlich bei Weitem sprengen. Begleitende Literatur, die sich primär an die Lehrenden richtet, wäre also erforderlich. Wenn ich im Schlussresümee (3.4) nochmals darauf zu sprechen komme, denke ich an solche Vertiefungen des Stoffs als Desideratum. Fehlen dergleichen Präzisierungen, so zeigt die Erfahrung, dass man sich – gemäß einem empirisch recht universell, d.h. im Mathematikunterricht genauso wie in der Natur feststellbaren Minimalprinzip – schlussendlich im Wesentlichen damit begnügt, die Inklusionskette $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ einzuprägen sowie Ausdrücke mit einem Minuszeichen als $\notin \mathbb{N}$, Brüche als $\notin \mathbb{Z}$, Zahlen, in denen Wurzeln, e oder π vorkommen, als $\notin \mathbb{Q}$ und solche mit einem i als $\notin \mathbb{R}$ zu identifizieren. Doch warum lautet AG 1.1 dann nicht schlicht „Die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$“? Werfen wir dazu einen Blick auf die Formulierung der zweiten GK zu AG 1:

> *AG 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit*

Abgesehen davon, dass auch hier eine Konkretisierung des geforderten Wissens moniert werden könnte, fällt die in AG 1.1 und AG 1.2 übereinstimmende Wendung „Wissen über ... einsetzen können“ auf. Solche Formulierungen ziehen sich durch den gesamten GKK. Der überwiegende Großteil aller GKen ist mit dem Verb „können“ gebildet, vereinzelt kommen „kennen“ und „wissen“ vor. Die zwei, drei Formulierungen, wo das nicht der Fall ist, scheinen aus Versehen hineingerutscht zu sein. Wenn ich nichts übersehen habe, kommt das Verb „verstehen“, das ich im Zusammenhang mit mathematischer Bildung für das entscheidende halte, nur in einer einzigen GK vor, nämlich in FA 1.7: *Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können*. Dieses eine Mal treffen also sogar Verb und Adverb zusammen. Tatsächlich finden sich Formulierungen mit „verständig“ als Ersatz für „verstehen“ im GKK sogar sehr häufig. Als mögliche Erklärung dieses Phänomens, ständig „etwas verständig tun können“, kaum aber „etwas verstehen“ zu müssen, habe ich das Schlagwort der „Kompetenzorientierung“ anzubieten. Ich werde in 3.1 in allgemeinerem Zusammenhang darauf zurückkommen.

Ich überspringe die jeweils fünf GKen zu „(Un)Gleichungen und Gleichungssystemen“ (AG 2) sowie zu „Vektoren“ (AG 3) und wende mich den beiden GKen des Themenbereichs Trigonometrie (AG 4) zu. Bei

> *AG 4.1 Definitionen von Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkeligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke einsetzen können*

ist man versucht, sich zu fragen, was von einem rechtwinkeligen Dreieck übrig bleibt, nachdem es aufgelöst worden ist. Man kann aber – und das will ich tun – gleich auch die nächste GK in den Blick nehmen:

> *AG 4.2 Definitionen von Sinus und Cosinus für Winkel größer als* 90^o *kennen und einsetzen können*
>
> *Anmerkungen:*
>
> *Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.*

Niemand wird behaupten, dass die in AG 4 angeführten Inhalte nicht zu „kennen“ bzw. zu „können“ seien. Ist hiermit aber *alles* Unverzichtbare zur Trigonometrie abgedeckt? Sind z.B. der Satz des Pythagoras oder die Winkelsumme des Dreiecks für eine mathematische Allgemeinbildung Luxusgüter? Unter dem Gesichtspunkt SSAE wohl schwerlich!

2.3 Inhaltsbereich „Funktionale Abhängigkeiten“ (FA)

Der Inhaltsbereich mit diesem bereits in Abschnitt 2.1 infrage gestellten Titel ist der umfangreichste und enthält nahezu die Hälfte aller GKen im GKK, nämlich 35 von 73. Er ist gegliedert in sechs Themenbereiche:

> 1. Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsfomen und Eigenschaften (9 GKen)
> 2. Lineare Funktion [$f(x) = kx + d$] (6 GKen)
> 3. Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$ oder mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$

(4 GKen)
4. Polynomfunktion [$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$] (4 GKen)
5. Exponentialfunktion [$f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$] (6 GKen)
6. Sinusfunktion, Cosinusfunktion (6 GKen)

Ich habe bereits eingangs Einwände dagegen vorgebracht, dass eine mathematische Querschnittsmaterie als Inhaltsbereich gleichrangig neben die klassischen mathematischen Teilgebiete Algebra und Geometrie, Analysis sowie Wahrscheinlichkeit und Statistik gestellt wird. Von diesen Einwänden will ich jetzt aber absehen. Denn immerhin weckt die Überschrift „Funktionale Abhängigkeiten" die Hoffnung, dass dem allgemeinen, die gesamte Mathematik durchziehenden Begriff der Funktion (oder, in einem formalen Sinn synonym, auch Abbildung genannt) gebührendes Gewicht verliehen wird. Der geeignete Rahmen wäre der Themenbereich FA 1. Tatsächlich findet sich auch gleich zu Beginn:

> *FA 1.1 für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann*

Bei genauerer Analyse der darauf folgenden GKen erkennt man aber, dass FA 1.1 die einzige GK bleibt, die sich nicht auf den Spezialfall reeller Funktionen beschränkt. Und selbst zu dieser GK ist mir noch keine stimmige Prüfungsaufgabe untergekommen.[2] Eine Erklärung ist schnell ausgemacht: Um funktionale von nichtfunktionalen Zusammenhängen unterscheiden zu können, wäre ein begrifflicher Rahmen erforderlich, der etwas weiter gefasst ist. Ein solcher stünde in Gestalt des noch allgemeineren Begriffs der Relation auch zur Verfügung – wohlgemerkt in der Mathematik, anscheinend aber nicht in der „Schulmathematik". Stünde der Begriff der Relation zur Verfügung, wäre es didaktisch fast zwingend, nicht nur Funktionen als Relationen mit einer bestimmten zusätzlichen Eigenschaft zu definieren, sondern auch die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv zu behandeln. Natürlich fehlen auch sie, folglich auch der Begriff der Umkehrfunktion und, damit eng verknüpft, jener der (etwas später nochmals aufzugreifenden) Verkettung von Funktionen. Konsequenterweise gehen auch allgemeine Wurzelfunktionen und Logarithmen im gesamten GKK ab. An dieser Stelle sei auch auf den (nunmehr keineswegs überraschenden) Umstand hingewiesen, dass Folgen als Funktionen mit der speziellen Definitionsmenge $\mathbb{N}$ ebenfalls gänzlich fehlen.

Wir wenden uns nun jenen Typen reeller Funktionen zu, die im GKK aufscheinen. Von den speziellen Funktionen übergehe ich hier die linearen (FA 2, anlässlich

[2] Dem Vernehmen nach soll es vereinzelt Aufgaben geben, wo eine Kurve in der Ebene darauf zu untersuchen ist, ob sie eine reelle Funktion darstellt. Damit ist aber immer noch nicht der allgemeine Funktionsbegriff erfasst.

von FA 5.4 werde ich aber FA 2.4 kurz erwähnen) und wende mich gleich dem Themenbereich

> FA 3: *Potenzfunktion mit* $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$ *oder mit* $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$

zu. Wie es überhaupt dazu gekommen ist, exakt diese geradezu sinnlos artifizielle Klasse von Funktionen als eine besondere auszuzeichnen, darüber kann ich nur spekulieren. Sie besteht – um meine Kritik anhand einer von zahlreichen Merkwürdigkeiten zu illustrieren – aus durchwegs (im Inneren des Definitionsbereichs) differenzierbaren Funktionen, ist aber gegenüber der Operation des Differenzierens nicht abgeschlossen. Kein Mathematiker würde sich ohne Not mit so einer Klasse beschäftigen!

Nach den Polynomfunktionen (FA 4) folgen als Themenbereich

> *FA 5 Exponentialfunktionen der Gestalt* $f(x) = a \cdot b^x$ *bzw.* $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$.

Die vierte der GKen dazu lautet:

> *FA 5.4 charakteristische Eigenschaften* ($f(x+1) = b \cdot f(x); [e^x]' = e^x$) *kennen und im Kontext deuten können*

Was heißt hier „charakteristisch"? An der Differentiationsregel $[e^x]' = e^x$ wollen wir keinen Anstoß nehmen (auch wenn selbst daraus Missverständnisse erwachsen könnten, weil neben f mit $f(x) = e^x$ ja auch jedes Vielfache $b \cdot e^x$ mit $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung $y' = y$ ist). Jedoch die Funktionalgleichung $f(x+1) = b \cdot f(x)$ betreffend, habe ich die Erfahrung gemacht, dass sie oft irrtümlich als „charakterisierend" angesehen wird, nämlich als ob die angegebenen Exponentialfunktionen die einzigen Lösungen wären. Offensichtlich gibt es aber (sofern $b \neq 0$) zu *jeder* Funktion $f_0 : [0,1) \to \mathbb{R}$ eine (eindeutige) Fortsetzung f auf ganz $\mathbb{R}$, die gleichzeitig Lösung der Funktionalgleichung $f(x+1) = b \cdot f(x)$ ist, während aber natürlich nur sehr spezielle Funktionen f_0 auf $[0,1)$ Exponentialfunktionen im intendierten Sinn sind. Eine ganz analoge Kritik betrifft lineare Funktionen und FA 2.4, weil die dort hervorgehobene Beziehung $f(x+1) = f(x) + k$ auf Funktionen der Bauart $f(x) = kx + d$ zwar natürlich zutrifft, jedoch aus analogen Gründen wie bei FA 5.4 *nicht nur* auf diese. Auch zu FA 6.4 wird nochmals ein ähnlicher Kritikpunkt auftauchen.

Der sechste und letzte Themenbereich zu FA beginnt mit:

FA 6.1 grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

Was genau hier „allgemeine Sinusfunktion" bedeuten soll, ist unklar. Eine mögliche Sinngebung für FA 6.1: Variiert man bei der grafischen Darstellung der Sinusfunktion die Einheiten auf x- und y-Achse, so entspricht dem die Variation der Parameter a und b. So ein Phänomen ist aber nicht spezifisch für die Sinusfunktion, sondern lohnt, wie ich etwas später noch in einem weiteren Kontext erwähnen werde, für allgemeines f verstanden zu werden. Als auf den Sinus beschränkte GK überzeugt mich FA 6.1 nicht. Aber vielleicht herrscht tatsächlich Verwirrung, was nun eine (spezielle?, allgemeine?) Sinusfunktion ist, und was eine beliebige periodische Funktion. Die nachfolgende GK, die ebenfalls noch dem Themenbereich FA 6 mit dem Titel „Sinusfunktion, Cosinusfunktion" angehört, deutet fast darauf hin:

FA 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können

Hier wird suggeriert, dass sich jede periodische Funktion auf elementare Weise (niemand denkt hier an Fourierreihen) mittels Sinus und Cosinus darstellen lasse, was natürlich falsch ist. Das Problematische daran ist von verwandter Art wie bei FA 2.4 und FA 5.4. In all diesen Fällen wird so getan, als wären gewisse Eigenschaften sehr spezieller Funktionen für diese bereits charakterisierend, während die interessierenden Eigenschaften in Wahrheit eine viel größere Funktionenklasse definieren.

Es lohnt ein kurzer, kritischer Rückblick auf den Inhaltsbereich FA. Zunächst wäre aus den bereits diskutierten Gründen statt „Funktionale Abhängigkeiten" wohl „Reelle Funktionen" die ehrlichere Überschrift. Deutlich schmerzhafter als dieser terminologische Schönheitsfehler sind schon die extrem willkürlichen, geradezu erratisch ausgewählten Mengen von Funktionen, mit denen Vertrautheit gefordert wird. Wer immer mit Mathematik nicht nur oberflächlich in Berührung gekommen ist, würde stattdessen wahrscheinlich, von einigen wenigen „elementaren" Funktionen ausgehend, jede Funktion zulassen, die sich daraus mittels Grundrechnungsarten und Verkettung bilden lässt. Damit ist ein entscheidendes Wort gefallen: Funktionen ohne Verkettung zu behandeln, ist ähnlich, wie wenn die Zahlenbereiche aus AG 1.1 ohne die auf ihnen definierten Rechenoperationen gelehrt würden. Von den zahlreichen inhaltlichen Mängeln, die dem GKK anzukreiden sind, gibt es ein paar – in 3.2 werde ich einige davon nochmals rekapitulieren –, die besonders schmerzen, und davon ist das Fehlen der Verkettung von Funktionen wahrscheinlich der fundamentalste. Wie also könnten Verbesserungsvorschläge lauten?

Wenn man zunächst nur die Identität $x \mapsto x$ als einzige „elementare“ Funktion zuließe, so ergäben sich allein vermittels der Grundrechnungsarten bereits sämtliche Polynome und alle gebrochen rationalen Funktionen. Darüber hinaus sollte aber zumutbar sein, auch andere elementare Funktionen (exp u.a., siehe weiter unten) zuzulassen und – vor allem – sie miteinander zu verketten. Dass die Komplexität einer zusammengesetzten Funktion in einer Prüfungsaufgabe ein angemessenes Maß nicht überschreiten darf, versteht sich von selbst. Gäbe man jedoch a priori eine obere Schranke der Komplexität explizit an, würde man bei weniger Begabten ein Lernen provozieren, das nicht auf Verständnis abzielt, sondern auf die Einübung von Rezepten, die möglichst alle laut Kompetenzkatalog erlaubten Beispiele abdecken.

Hat man (wie ich es für unverzichtbar hielte) auch die Verkettung von Funktionen zur Verfügung, so wären damit automatisch die (extrem wichtigen) Übergänge von einer Funktion $f(x)$ zu $f(x+c)$, $f(cx)$, $f(x)+c$, $cf(x)$ u.Ä. erfasst. Zurzeit klingt das im Kompetenzkatalog – extrem unbefriedigend – lediglich in zwar vielleicht wichtigen, aber dennoch relativ willkürlich herausgegriffenen Spezialfällen (wie $a \cdot \sin(b \cdot x)$ in FA 6.1) an.

Auch zu den „charakteristischen“ Eigenschaften gewisser Funktionen sind weitere Bemerkungen am Platz. Statt der Funktionalgleichung $f(x+1) = b \cdot f(x)$, die – wie bereits oben erwähnt – eine zwar wissenswerte, aber keine charakterisierende Eigenschaft von Funktionen der Gestalt $f(x) = a \cdot b^x$ ist, bietet sich als Ausgangspunkt die viel prominentere Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ der Exponentialfunktion an. Dass sie im GKK nicht vorkommt, hängt wohl damit zusammen, dass $a \neq 1$ zugelassen wurde, in welchem Fall aus mathematischer Sicht nur die weniger interessante, weil speziellere erste, nicht aber die fundamentale zweite Funktionalgleichung gilt. Dabei bietet sich aus mathematischer Sicht eine sehr elegante Vorgangsweise an: Mit Addition und Multiplikation lassen sich vier sehr einfache Funktionalgleichungen (interpretierbar als Homomorphiebedingungen zwischen der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ bzw. der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^+$) formulieren, deren Lösungsmenge (bei minimaler zusätzlicher Voraussetzung, Stetigkeit oder Monotonie an nur einer Stelle genügt) jeweils eine einparametrige Schar von sehr wichtigen Funktionen ist: Die Lösungen von $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sind die (homogenen) linearen Funktionen der Bauart $f(x) = k \cdot x$ mit $k \in \mathbb{R}$; die Lösungen von $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, sind die Exponentialfunktionen der Bauart $f(x) = b^x$ mit $b > 0$; die Lösungen von $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, sind (neben $f \equiv 0$) die Logarithmusfunktionen der Bauart $f(x) = \log_b(x)$ mit $b > 0, b \neq 1$; und die Lösungen von $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sind die Potenzfunktionen der Bauart $f(x) = x^c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Diese vier Funktionstypen könnte man beispielsweise als Ausgangspunkt nehmen. Ergänzt man sie noch durch die trigonometrischen Funktionen, so hat man wohl alles, was man für den Schulunterricht braucht. (Wie sich all diese

Funktionen aus der Exponentialfunktion entwickeln lassen, habe ich in [5] in Hinblick auf den Schulunterricht ausgebreitet – so wie in zahlreichen vergleichbaren Artikeln vor allem in den „Didaktikheften" der ÖMG auch andere schulrelevante Themen.)

2.4 Inhaltsbereich „Analysis" (AN)

Die Analysis wird sehr schlank, nämlich durch nur 11 GKen abgedeckt, die vier Themenbereichen zugeordnet sind:

1. Änderungsmaße (4 GKen)
2. Regeln für das Differenzieren (1 GK)
3. Ableitungsfunktion/Stammfunktion (3 GKen)
4. Summation und Integral (3 GKen)

In den ersten drei GKen aus AN 1 ist von absoluten und relativen (prozentuellen) Änderungsmaßen die Rede sowie von Differenzen- und Differentialquotienten auf der „Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs". Was soll das heißen? Beide, Intuition und Begriff, sind in der Mathematik von entscheidender Bedeutung.[3] Als besonders mächtig erweist sich die Mathematik, indem sie die beiden beständig in Verbindung setzt. Der Begriff des Grenzwerts ist für die Mathematik vielleicht der wichtigste überhaupt. Wenigstens für ihn, so würde man meinen, sollten GKen sowohl Intuition als auch begriffliche Klarheit einfordern. Auch wenn Letzteres mit gewissen intellektuellen Ansprüchen verbunden sein mag: Wozu haben wir „Höhere Schulen", wenn wir sämtliche intellektuellen Ansprüche von vornherein aufgeben? Meiner Erfahrung nach steht die Floskel vom „intuitiven Grenzwertbegriff" dafür, dass begrifflich überhaupt nichts geklärt wird, und die Intuition durch schwammige Formulierungen ersetzt wird, die sich auch nicht für Prüfungsaufgaben eignen. Angesichts dieses Vakuums umso bemerkenswerter ist die letzte der vier GKen aus AN 1:

> *AN 1.4 das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können*

Geht es hier also um dynamische Systeme? Ohne sauberen Grenzwertbegriff und ohne den Begriff der Folge vorbereitet zu haben? Sind unter dem Begriff der „Differenzengleichung" beliebige Rekursionen subsumiert oder nur lineare? Und setzt das Verständnis von Rekursionen nicht auch das Induktionsprinzip voraus, das nicht nur im GKK fehlt, sondern vor geraumer Zeit überhaupt aus dem Lehrplan eliminiert wurde? Bei all diesen ungeklärten Fragen verwundert es nicht,

[3] Man denke an Kants berühmte Sentenz: „Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind."

dass man substanzielle Prüfungsaufgaben zu AN 1.4 vergebens sucht – schlicht weil sie im Vergleich zum sonst vorkommenden Stoff um Größenordnungen zu anspruchsvoll wären.

Die Regeln für das Differenzieren sind in einer einzigen GK zusammengefasst:

> *AN 2.1 einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für* $[k \cdot f(x)]'$ *und* $[f(k \cdot x)]'$ *(vgl. Inhaltsbereich* Funktionale Abhängigkeiten*)*

Wieder einmal haben wir es mit einer unvollständigen und willkürlichen Auswahl zu tun (SSAE). Wörtlich genommen und in Verbindung mit den GKen aus FA können damit nur Polynomfunktionen, ergänzt durch Summanden der Bauart $a \cdot e^x$, $a \cdot \sin(b \cdot x)$ und/oder $a \cdot \cos(b \cdot x)$, differenziert werden. (Man beachte, dass die Ableitung der laut FA 3 noch zulässigen Quadratwurzeln nicht mehr zulässig ist, weil Funktionen der Bauart $f(x) = a \cdot x^z$ mit $z = -\frac{1}{2}$ nicht vorkommen.) Die letzte Regel in AN 2.1 ist offenbar ein verkümmertes Relikt der wichtigen und extrem aussagekräftigen Kettenregel, die aber natürlich fehlt, weil sie mangels Verkettung von Funktionen (siehe Inhaltsbereich FA) nicht einmal griffig formuliert werden kann. Gerade beim Differenzieren wäre es jedoch mit geringem zusätzlichen Aufwand möglich, einen vollständigen Werkzeugkasten für beliebige „regulär aufgebaute" Funktionen bereitzustellen – ganz im Gegensatz zum Integrieren.

Aber nicht einmal auf das Vorhandensein eines solchen Werkzeugkastens wird hingewiesen. Dafür folgen unmittelbar drei (an sich zweifellos sinnvolle) GKen zum Themenbereich Ableitungsfunktion/Stammfunktion (AN 3), von denen die erste lautet:

> *AN 3.1 den Begriff Ableitungsfunktion/Stammfunktion kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können*

Es ist zu vermuten, dass als Grundlage auch hier ein „intuitiver Grenzwertbegriff" gemeint ist. Aber warum nur intuitiv? Aus Angst vor dem so wichtigen Begriff? Grenzwerte von Folgen, Konvergenz unendlicher Reihen, Stetigkeit, Ableitung und Integral – fünf zentrale Begriffe der Mathematik, die alle auf dieselbe Idee bzw. dieselbe logische Struktur zurückzuführen sind und daher theoretisch fast mit einem Streich sauber erschlossen werden könnten. (Natürlich erstrecken sich diese Themen über mehrere Schuljahre; es lohnt also, aus früheren Schulstufen bereits bekannten Stoff gelegentlich zu wiederholen.) Entscheidend wäre, dass man sich zu begrifflich klarer Arbeit durchringen könnte.

Im Themenbereich „Summation und Integral“ überrascht es nicht, dass jene GK, die auf Integrationsregeln abzielt, in ähnlicher Weise matt wirkt wie AN 2.1 zum Differenzieren weiter oben:

> *AN 4.2 einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)\,dx$, $\int f(k \cdot x)\,dx$ (vgl. Inhaltsbereich* Funktionale Abhängigkeiten*), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können*

Noch mehr als das Bruchstückhafte von AN 4.2 schmerzt aber die viel zu undeutlich bleibende Unterscheidung zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral sowie – hier wird es geradezu absurd – das Fehlen jeglicher halbwegs expliziten Bezugnahme auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in seiner allgemeinen, nicht auf Polynomfunktionen beschränkten Form. Zugespitzt könnte man sagen: Der Witz der gesamten Infinitesimalrechnung auf Schulniveau besteht darin, dass zwischen zwei auf den ersten Blick völlig unterschiedlichen Konzepten, nämlich dem der Ableitung (Differentialquotient) und dem des bestimmten Integrals (Ober- und Untersummen) jene Beziehung besteht, die der Hauptsatz beschreibt und wodurch erst der Begriff des unbestimmten Integrals (Stammfunktion) seine Bedeutung erlangt.

2.5 Inhaltsbereich „Wahrscheinlichkeit und Statistik“ (WS)

Der Inhaltsbereich WS erweist sich als besonders problematisch. Zugegebenermaßen liegt das auch daran, dass wir in der Vermittlung der Stochastik vom Stein der Weisen noch ganz besonders weit entfernt sind. Es scheint nämlich alles andere als klar, wie die teils anspruchsvollen Begriffe, die im GKK (oft nur implizit) vorkommen, für den Schulunterricht am besten adaptiert werden sollten. Aufgrund dieser Schwierigkeiten werde ich bei WS auch häufiger und ausführlicher als bisher darauf aufmerksam machen, wenn ich den Eindruck habe, dass bei gewissen Schlagworten die dahinterstehenden Begriffe nicht selbstverständlich sind. Umso dringlicher erscheint es, auf die besonders zahlreichen fachlichen Unstimmigkeiten des GKK und die damit verbundenen ungelösten Probleme im Inhaltsbereich WS hinzuweisen. Entsprechend umfangreich ist dieser Abschnitt geraten. Doch der Reihe nach! Die 4 Themenbereiche innerhalb WS lauten:

1. Beschreibende Statistik (4 GKen)
2. Wahrscheinlichkeitsrechnung (4 GKen)
3. Wahrscheinlichkeitsverteilung(en) (4 GKen)
4. Schließende/Beurteilende Statistik (1 GK)

Der erste Themenbereich, die beschreibende Statistik, ist äußerst elementar gehalten. Dagegen ist zunächst nichts einzuwenden. Bedauerlicherweise wird das elementare Niveau aber auch nie verlassen. Repräsentativ ist bereits die erste GK daraus (die zweite ist sehr ähnlich):

> *WS 1.1 Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können*

Dass 18-Jährige (so wie hoffentlich auch schon 12-Jährige) imstande sein sollen, Tabellen zu lesen, dem stimmen wir vorbehaltlos zu. Erst recht wichtig ist die Fähigkeit zu angemessenen Interpretationen von grafischen Darstellungen. Auch folgende „Kompetenz“ erwartet man von Maturanten:

> *WS 1.3 statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können*

Was beispielsweise wäre die Interpretation des Werts $V = 10$ für die Varianz V in einem bestimmten Kontext? Weil das wahrscheinlich nicht nur mir nicht so klar ist, gibt es zu dem gar nicht so kleinen Themenkomplex, der durch WS 1.3 angesprochen wird, anscheinend im Wesentlichen nur einen Aufgabentyp, die sogenannte „Boxplot“-Aufgabe. Dabei handelt es sich um ein in der „Schulmathematik“ besonders beliebtes, standardisiertes grafisches Schema, mit dem man Minimum, Maximum, Median und Quartile eines Datensatzes darstellen kann. Der mathematische Kern einer Boxplotaufgabe besteht aber nur darin, endlich viele Zahlenwerte der Größe nach zu ordnen und anschließend in zwei Hälften bzw. in vier Viertel zu teilen, wobei eventuell noch gewisse (sehr nachrangige) Besonderheiten hinsichtlich gerade/ungerade, etc. zu beachten sind.[4] Das, so denke ich,

[4]Ich danke Walter Mayrhuber für den Hinweis, dass gerade wegen dieser Besonderheiten bei einer geraden Anzahl $2n$ von geordneten Zahlenwerten $x_1 \leq \ldots \leq x_{2n}$ auch beim „Boxplot“ Schwierigkeiten auftreten können: Mindestens drei Möglichkeiten einer Definition eines Medians kommen mir ad hoc in den Sinn: das arithmetische Mittel $\frac{x_n+x_{n+1}}{2}$, das Intervall $[x_n, x_{n+1}]$ (also eine Menge statt einem einzelnen Wert) oder auch jede beliebige Zahl aus dem Intervall $[x_n, x_{n+1}]$. Im letzten Fall ist der Zusammenhang, der ein Zahlen-$2n$-Tupel mit seinem Median verknüpft, kein funktionaler (sofern nicht zufällig $x_n = x_{n+1}$ gilt). Meint man diese Variante des Begriffs und spricht man aber gleichzeitig von *dem* statt von *einem* Median, so sind Missverständnisse vorprogrammiert und sie scheinen bei Prüfungen auch schon tatsächlich aufgetreten zu sein. Besonders bedauerlich ist das deshalb, weil es hier ja nur um terminologische Konventionen geht und nicht um den Kern des Medianbegriffs, den man für meinen Geschmack vorteilhaft im Zusammenhang mit Verteilungsfunktionen und beliebigen Quantilen behandeln könnte. Versucht man vom Konkreten dieses Beispiels zu abstrahieren, so fällt die Anfälligkeit der „Schulmathematik“ für Unsicherheiten auf, die von Nebensächlichkeiten herrühren, aus denen aber schwerwiegende dogmatische Fragen gemacht werden. Ich habe schon mehrmals erlebt, wie in Diskussionen über unbedeutende Kleinigkeiten mehr Zeit vergeudet wird, als – um es anhand eines prominenten Beispiels etwas überspitzt auszudrücken – die Einführung eines sauberen Grenzwertbegriffs in Anspruch nehmen würde.

sollte auch einem durchschnittlich begabten Volksschulkind ohne große Schwierigkeiten beizubringen sein. Doch auch für unsere 18-Jährigen gehen nur wenige Aufgabentypen zum Inhaltsbereich WS über dieses Niveau hinaus. Woran das liegt? Vor allem daran, dass in den verbleibenden drei Themenbereichen zu WS nur mehr wenig Überzeugendes kommt und manches fachlich höchst fragwürdig ist, während es aber trotzdem bei jedem Maturatermin wenigstens ein paar Aufgaben zum Themenbereich WS geben muss (SSAE). Mit dieser scharfen Kritik verpflichte ich mich gleichzeitig, jede der $4+4+1=9$ noch kommenden GKen zur Gänze wiederzugeben und wenigstens kurz zu diskutieren.

Beginnen wir mit dem Themenbereich WS 2, Wahrscheinlichkeitsrechnung Grundbegriffe. Vor über 80 Jahren erlöste Kolmogorow die Wahrscheinlichkeitsrechnung von ihrem bis dato unbefriedigenden Status innerhalb der Mathematik. Indem er sie auf ein maßtheoretisches Fundament stellte, fügte er sie in den mittlerweile riesigen Korpus der modernen Mathematik, der den höchsten Kriterien methodischer Strenge genügt, nahtlos ein. Im ersten, konzeptuell fundamentalen Schritt gelingt das mithilfe des Begriffs des Wahrscheinlichkeitsraums. Darunter versteht man bekanntlich ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit einer Menge Ω sogenannter Elementarereignisse, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω von (messbaren) Ereignissen und einer $[0,1]$-wertigen, σ-additiven Mengenfunktion $\mathbb{P}$, die einem Ereignis $A \in \mathcal{A}$ seine Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ zuordnet und insbesondere $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ und $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ erfüllt. Dass man diese Terminologie für den Schulunterricht nicht eins zu eins übernimmt, finde auch ich sinnvoll. Insbesondere möchte ich alles andere, als das σ betonen. Im Schulunterricht sollte es vollkommen genügen, die endliche Additivität von $\mathbb{P}$ als den entscheidenden Punkt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs herauszuarbeiten. Außerdem geht es nicht darum, an Worten oder an einem bestimmten Formalismus zu kleben. Mit umso größerer Spannung erwarten wir die erste GK zum Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie lautet:

> *WS 2.1 Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können*

Aus dieser GK könnte durchaus etwas werden! Mit „Grundraum“ dürfte jene Menge gemeint sein, die ich oben mit Ω bezeichnet habe, mit „Ereignis“ ein Element der Algebra $\mathcal{A}$. Leider gibt auch die nächste GK darüber keine nähere Auskunft. Dafür ist erstmals von „Wahrscheinlichkeit“ die Rede, die man (mit oder ohne Kolmogorow) wohl als *den* fundamentalen Begriff des Inhaltsbereichs WS anzusehen geneigt ist:

> *WS 2.2 relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können*

Was Wahrscheinlichkeit ist, geht daraus nicht hervor, sondern wir erfahren nur eine ihrer Eigenschaften, nämlich durch gewisse Quotienten geschätzt werden zu können. An sich ist diese Enthaltsamkeit hinsichtlich metaphysischer Erklärungen lobenswert und wäre wohl auch ganz im Sinne Kolmogorows, der uns ja auch nicht verrät, *was* Wahrscheinlichkeit ist. Es ist geradezu der Witz an seiner Definition eines Wahrscheinlichkeitsraums, dass in der (σ-) Additivität von $\mathbb{P}$ (samt begleitenden Trivialforderungen) alles Nötige steckt, um darauf sowohl eine wunderbare Theorie als auch beeindruckend leistungsstarke Modelle für Anwendungen aufbauen zu können. Doch scheint man in der „Schulstochastik" keinen Anlass zu sehen, Nutzen aus den großen Freiheiten zu ziehen, die uns Kolmogorow eröffnet. Beispielsweise könnte man auf einer endlichen Menge $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a priori *beliebige* $p_i = \mathbb{P}(\{a_i\}) \in [0,1]$ zulassen, sofern sie nur $p_1 + \ldots + p_n = 1$ erfüllen. (Mit $n = 6$ könnte man damit beispielsweise auch einen „unfairen" Würfel modellieren.) Doch bräuchte man dazu einen sauberen Funktionsbegriff, dessen Fehlen ich ja bereits kritisiert habe. Anstatt begriffliche Klarheit zu schaffen, wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff auch in der folgenden GK WS 2.3 (siehe weiter unten) nur umkreist wie der heiße Brei. Bevor wir uns dieser nächsten GK zuwenden, soll aber noch ein weiterer problematischer Aspekt von WS 2.2 herausgearbeitet werden.

Und zwar liegt es nahe, WS 2.2 mit dem Gesetz der großen Zahlen im Hintergrund zu sehen. Man könnte etwas zugespitzt, aber ohne großes Risiko behaupten: Die beiden Grundbegriffe der Stochastik sind Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit, ihre beiden Hauptergebnisse sind das Gesetz der großen Zahlen und der Zentrale Grenzwertsatz. Das klingt alles im GKK an, expressis verbis erwähnt wird nur die Wahrscheinlichkeit, überzeugend erklärt wird gar nichts. Natürlich dürfen wir vom GKK auch keine umfassenden mathematischen Erklärungen erwarten. Dafür wären, wie schon an früherer Stelle bemerkt, andere, umfangreichere Unterlagen wünschenswert. Man möchte aber doch genauer verstehen, was mit einer GK gemeint ist. Zunächst zum Gesetz der großen Zahlen: Was spricht dagegen, eine Aussage der folgenden Art zu unterrichten? „Für eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen (die alle dieselbe Verteilung haben und nicht zu sehr schwanken dürfen) konvergieren die arithmetischen Mittel mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen den gemeinsamen Erwartungswert." Das ist wegen der unpräzisen Voraussetzung zwar kein mathematisches Theorem im strengen Sinn. Auch ist an dieser Stelle nicht ausdrücklich geklärt, wie das Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum aller möglichen Folgen zu definieren ist. Dafür drückt die vorgeschlagene Formulierung einen beträchtlichen Teil dessen aus, worum es in der Stochastik geht. Wer einwendet, dass dies in der Schule unmöglich gelehrt werden könne, weil die Begriffe „Unabhängigkeit" und „konvergieren" im GKK fehlen, dem antworte ich: Umso dringlicher ist die Aufnahme beider in den GKK zu fordern.

Doch nun zur bereits angekündigten nächsten GK:

> *WS 2.3 Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und inter-*

pretieren können

Mit „Laplace-Annahme" ist anscheinend gemeint, dass es nur endlich viele Elementarereignisse gibt, die alle gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Nimmt man den ersten Teil von WS 2.3 wörtlich, so besagt er: Man soll in der Lage sein, zu zählen und, wenn beim Zählen als Ergebnis die Zahl n herauskommt, auch noch ihren Kehrwert $\frac{1}{n}$ zu bilden. Anspruchsloser geht es wohl kaum! Wertvoll wäre dabei aber gerade das Vermögen, kritisch zu beurteilen, *ob* die Laplace-Annahme gleicher Wahrscheinlichkeiten (etwa durch Symmetrieargumente) gerechtfertigt werden kann. Es ist nicht notwendig, dass ich hier eines der allseits bekannten Beispiele dafür ausbreite, dass gerade die Laplace-Annahme, obwohl vielleicht auf den ersten Blick plausibel, nach genauerer Prüfung verworfen werden muss. Hat man sich hingegen in einem konkreten Beispiel einmal vom Zutreffen der Laplace-Annahme überzeugt, so ist das Abzählen der Elementarereignisse und die Bildung des Kehrwerts ihrer Anzahl schwerlich als vollwertige Maturaaufgabe anzusehen. Im ersten Teil von WS 2.3 wurde also wieder einmal das mathematisch interessante Potenzial erstickt und durch das Banale ersetzt (SSAE).

Wenden wir uns dem zweiten Teil von WS 2.3 mit „Additions-" und „Multiplikationsregel" zu. Es scheint, dass unter „Additionsregel" die Additivität von $\mathbb{P}$, also das wesentliche Element des Wahrscheinlichkeitsbegriffs selbst verstanden wird. Mit „Multiplikationsregel" hingegen dürfte jene Beziehung zweier Ereignisse gemeint sein, die man gemeinhin zur Definition ihrer Unabhängigkeit verwendet. Nicht aber im GK: Hier kommt der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit nämlich gar nicht vor. Doch auch wenn man sich nur die beiden genannten Regeln vor Augen hält: Sowohl mathematisch als auch didaktisch höchst unglücklich ist die scheinbare Gleichrangigkeit, mit der sie, nur durch das Wort „und" verknüpft, in einem Atemzug präsentiert werden. Dabei könnte ihr Status unterschiedlicher kaum sein: Das eine ist Bestandteil des Grundbegriffs, von dem große Teile des Inhaltsbereichs WS handeln. Das andere ist eine Eigenschaft, die ein Paar oder auch eine größere, möglicherweise auch unendliche Familie von Ereignissen haben kann oder auch nicht. Erst *wenn* diese Eigenschaft vorliegt, liefern die meisten interessanten Resultate der Stochastik (wie das Gesetz der großen Zahlen oder der Zentrale Grenzwertsatz) die beeindruckenden Aussagen. Doch wo kein Begriff von Unabhängigkeit, da auch keine interessante Stochastik![5] Dabei wäre der Begriff der Unabhängigkeit auch abseits jedes Formalismus wertvoll. Er wäre (vorzugsweise zusammen mit dem Begriff der Korrelation) z.B. dazu prädestiniert, zur Diskussion und Erhellung des ominösen und philosophisch so schwierigen Begriffs des Zufalls entscheidend beizutragen. Jedenfalls wäre es mehr als wünschenswert, sowohl bei der „Additionsregel" als auch bei der „Multiplikationsregel" dem Schematischen durch das Begriffliche erst seinen Sinn zu geben.

Wer den Begriff der Unabhängigkeit völlig vermeiden möchte, kann sich übrigens

[5] Ich darf auch auf meinen Artikel [6] verweisen.

noch auf folgende Ergänzung im GKK berufen:

> *Anmerkungen:*
>
> *Die Multiplikationsregel kann unter Verwendung der kombinatorischen Grundlagen und der Anwendung der Laplace-Regel (auch) umgangen werden.*

Man kann spekulieren, was genau und insbesondere welche „kombinatorischen Grundlagen“ hier gemeint sind. Darf man die letzte GK des Themenbereichs WS 2 als Hinweis deuten?

> *WS 2.4 Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können*

Es bietet sich zwar mancherlei an, um an WS 2.4 anzuschließen. Die Erfahrung zeigt aber, dass die in WS 2.3 und WS 2.4 enthaltenen Andeutungen zu vage sind, als dass daraus interessante Prüfungsaufgaben erwüchsen. Somit bleibt auch an dieser Stelle beträchtliches Potenzial ungenutzt (SSAE).

Wir wenden uns WS 3, dem dritten Themenbereich innerhalb des Inhaltsbereichs Wahrscheinlichkeit und Statistik, zu. Er trägt den Titel Wahrscheinlichkeitsverteilung(en). Mancherlei kommt in den vier GKen dieses Themenbereichs vor, nur nicht – man ist bereits darauf gefasst – ein klarer Hinweis, wie der titelgebende Begriff gemeint ist. Zwar lautet schon die erste GK:

> *WS 3.1 die Begriffe* Zufallsvariable, (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung, Erwartungswert *und* Standardabweichung *verständig deuten und einsetzen können*

Doch steht man ratlos vor der Frage, ob mit „(Wahrscheinlichkeits-)Verteilung“ der durch $\mathbb{P}$ gegebene Wahrscheinlichkeitsraum gemeint ist (vermutlich nicht, denn sonst wäre er schon früher aufgetaucht), eine Verteilungsfunktion (wodurch ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Trägermenge $\Omega = \mathbb{R}$ festgelegt wäre) oder sonst ein Surrogat der beiden. Zweifellos sind alle diese Begriffe aus WS 3.1 unverzichtbar für die Stochastik, doch verkommen sie in der Praxis der „Schulmathematik“ meist zu hohlen Schlagworten, die im Wesentlichen nur in zwei konkreten Fällen äußerst schematische Anwendung finden: Binomial- und Normalverteilung. Inwiefern sich beide Beispiele einem gemeinsamen allgemeinen Begriff unterordnen, bleibt im Dunkeln. Natürlich ist es schwierig zu begreifen, was eine Zufallsvariable ist, wenn der allgemeine Funktionsbegriff nicht wirklich verstanden wird. Und wie erst will man ohne klaren Begriff einer Zufallsvariablen und auf der Basis defizitärer Integralrechnung allgemein von Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen sprechen? Es scheint, als ginge dem System „Schulmathematik“ das Bewusstsein dafür ab, wie dünn das Eis ist, auf dem man sich in der Stochastik bewegt, und wie abgrundtief die Gewässer darunter mit ihren Strudeln und Ungetümen!

Und wie sieht die Praxis der „Schulstochastik“ angesichts WS 3.1 aus? De facto reduziert sich das gesamte einzubringende Wissen auf die auswendig gelernten Formeln $\mathbb{E}(X) = n \cdot p$ und $\mathbb{V}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$ (für X binomialverteilt mit Parametern n und p) bzw. $\mathbb{E}(X) = \mu$ und $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ (für X normalverteilt mit Parametern μ und σ). Damit sind wir auch schon bei der nächsten GK:

> *WS 3.2 Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen*

Hier wurde offenbar „Modell“ mit „Beispiel“ verwechselt. Bei der Binomialverteilung handelt es sich nämlich um ein *Beispiel* einer diskreten Verteilung – übrigens das einzige, das neben der nur implizit vorkommenden Gleichverteilung (Laplace) im GKK vorkommt. Von einem *Modell* hingegen spricht man in Bezug auf einen zunächst außermathematischen Sachverhalt, der erst in die Sprache der Mathematik übersetzt wird (vergleiche auch WS 3.3 weiter unten samt Fußnote). An WS 3.2 fällt außerdem kritisch auf, dass Erwartungswert und Varianz in der Praxis lediglich durch Einsetzen der Parameter in die obigen Formeln „ermittelt“ werden, ohne Verständnis für den Hintergrund. Insbesondere geht hier die Bezugnahme auf Unabhängigkeit, die man bei der Additivität von Varianzen ja braucht, schmerzlich ab.

Im Hinblick auf Anwendungen zweifellos höchst sinnvoll ist:

> *WS 3.3 Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann*[6]

Wie ist das ohne den Begriff der Unabhängigkeit auf verständige Weise möglich? Diese Frage wird vom GKK nicht beantwortet. Dafür geht es, an sich ebenfalls durchaus sinnvoll, mit der nächsten GK weiter:

> *WS 3.4 Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können*

Ein didaktisch wie auch historisch naheliegender Zugang zu einem der Hauptsätze der Stochastik scheint sich hier verselbstständigt zu haben. Das Ziel, zu dem dieser Zugang hätte führen sollen, nämlich der Zentrale Grenzwertsatz (ZGWS),

[6] Hier ist es im Gegensatz zu WS 3.2 korrekt, von „modellieren“ zu sprechen.

ist dabei jedoch verloren gegangen. Natürlich übersteigt eine strenge Formulierung des ZGWS (nicht nur in einer sehr allgemeinen Fassung mit asymptotisch vernachlässigbaren Folgen von Zufallsgrößen, Lindeberg- und Fellerbedingung o.Ä.) die Möglichkeiten des Schulunterrichts. Wo immer von Normalverteilung und Glockenkurve die Rede ist, sollte aber aus dem Unterricht der universelle Charakter dieser Verteilung hängen bleiben: Die normierte Summe sehr vieler unabhängiger Zufallsgrößen, von denen jede einzelne klein ist im Vergleich zur Summe, ist (approximativ) normalverteilt. Dabei kommt es – und darin liegt der Witz – *nicht* auf die spezielle Verteilung der einzelnen Summanden an. Die Binomialverteilungen als diskrete Approximationen spielen im ZGWS keine ausgezeichnete Rolle. Sie eignen sich nur deshalb besonders gut zur Veranschaulichung, weil sie mithilfe der Binomialkoeffizienten relativ leicht berechnet werden können. Es gibt also sehr gute Gründe, sie im Unterricht zur Motivation der Glockenkurve zu verwenden; der Held des ZGWS ist aber die Normalverteilung – und nur sie. Verwirrungen, die in diesem Zusammenhang weit verbreitet sind, manifestieren sich gelegentlich auch in Aufgaben, wo die Normalverteilung durch Binomialverteilungen approximiert wird, während in der Praxis der umgekehrte Weg der interessante ist: Ist die Normalverteilung einmal bekannt (und das ist sie, beispielsweise vermittels ihrer Dichtefunktion oder der im Unterricht gebräuchlichen Tabellen), so kann man sie als Approximation verwenden, z.B. für komplizierte diskrete Verteilungen mit bekanntem Erwartungswert und Varianz, die als Summen vieler kleiner unabhängiger Zufallsgrößen zustandekommen.

Im GKK folgt unmittelbar auf WS 3.4:

> *Anmerkungen:*
>
> *Kennen und Anwenden der Faustregel, dass die Normalapproximation der Binomialverteilung mit den Parametern n und p dann anzuwenden ist und gute Näherungswerte liefert, wenn die Bedingung* $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 9$ *erfüllt ist. Die Anwendung der Stetigkeitskorrektur ist nicht notwendig und daher für Berechnungen im Zuge von Prüfungsbeispielen vernachlässigbar. Kennen des Verlaufs der Dichtefunktion* φ *der Standardnormalverteilung mit Erwartungswert* μ *und Standardabweichung* σ*. Arbeiten mit der Verteilungsfunktion* Φ *der Standardnormalverteilung und korrektes Ablesen der entsprechenden Werte.*

Die Zahl 9 in der „Faustregel“ vermag unter Mathematikern Heiterkeit hervorzurufen. Denn selbstverständlich würde die Faustregel nicht plötzlich völlig falsch, wenn man 9 durch 8 oder durch 10 ersetzte. Auch hängt es von der Art der Anwendung ab, welche Güte der Approximation als zufriedenstellend angesehen werden kann. Mehr Sinn hätte eine Ungleichung dieser Art, wenn mit ihr eine Quantifizierung der Approximationsgüte verbunden wäre. Interessant an der „Faustregel“ ist, wie der Term $n \cdot p \cdot (1-p)$, den wir übrigens schon als Varianz der Binomialverteilung kennengelernt haben, von den beiden Parametern n und p abhängt: Großes n und ein p nicht zu nahe bei 0 oder 1 garantieren eine gute Approximation.

Wir kommen zum letzten Themenbereich des GKK, der Schließenden/Beurteilenden Statistik, die aus nur einer GK besteht:

> *WS 4.1 Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekannten Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können*

Sinnvolle und gleichzeitig korrekte Prüfungsaufgaben zum ersten Teil von WS 4.1 sind de facto kaum möglich, weil zu schwierig. Der Begriff des Konfidenzintervalls ist nämlich viel komplizierter, als es bei oberflächlicher Behandlung den Anschein hat (und auch als es in zahlreichen „schulmathematischen" Quellen suggeriert wird). Um das an einem möglichst einfachen Beispiel zu illustrieren, gehen wir von einer binomialverteilten Zufallsgröße aus, von der der Parameter n bekannt und p gesucht sei. Zur Konkretisierung denken wir uns eine Münze, von der wir nicht wissen, ob sie fair ist. Deshalb bezeichne p die Wahrscheinlichkeit für „Kopf", $1-p$ für „Adler". Wir wollen die Münze n-mal werfen und auf Basis des Ergebnisses ein Intervall angeben, in dem der Parameter p mit großer Sicherheit liegt. Wie p zu schätzen ist, liegt auf der Hand: durch den Wert $\tilde{p} := \frac{k}{n}$, wenn unter n Würfen k-mal „Kopf" vorgekommen ist. Natürlich hoffen wir auf $\tilde{p} \approx p$. Es wäre aber absurd, exakt mit $\tilde{p} = p$ zu rechnen. Ein Konfidenzintervall $[a,b]$, etwa $a = \tilde{p} - \varepsilon$ und $b = \tilde{p} + \varepsilon$ mit angemessen gewähltem $\varepsilon > 0$, ist – zunächst sehr grob gesprochen – ein Intervall, das p „mit hoher Wahrscheinlichkeit" enthält. Geht man dieser noch ungenauen Formulierung auf den Grund, so erkennt man die Schwierigkeit: Sie suggeriert, dass der Parameter p selbst eine Zufallsgröße mit einer Verteilung sei, unter der das Intervall $[a,b]$ große Wahrscheinlichkeit habe. Das ist aber (in der klassischen, frequentistischen Statistik, anders verhält es sich in der Bayesschen) nicht der Fall, weil p *keine* Zufallsgröße, sondern eine feste, wenn auch unbekannte reelle Zahl ist. Jedoch sollen sich die Intervallgrenzen a und b aus der vorliegenden (zufälligen) Stichprobe X ergeben. Sie sind also selber als Zufallsgrößen $a = a(X)$ und $b = b(X)$ aufzufassen. Allerdings kennen wir, weil der wahre Wert p ja unbekannt ist, die Verteilung der Stichprobe nicht. Eine korrekte Beschreibung für ein Konfidenzintervall könnte etwa so lauten: Die Schätzfunktionen $a(X)$ und $b(X)$ sind so zu definieren, dass für jeden denkbaren Parameter p (im Beispiel $p \in [0,1]$) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $a(X) \leq p \leq b(X)$ gilt, z.B. mindestens 0,99 ist. Man mache sich an dieser Stelle klar, welch umfangreiche Rechnungen notwendig wären, um $a(X)$ und $b(X)$ nicht nur geeignet zu definieren (zum Beispiel als $a(X) := \tilde{p} - \varepsilon_1(X)$ und

$b(X) := \tilde{p} + \varepsilon_2(X)$ mit näher zu spezifizierenden „Sicherheitsabständen" $\varepsilon_1(X)$ und $\varepsilon_2(X)$), sondern für jedes $p \in [0,1]$ die behauptete Wahrscheinlichkeitsaussage nachzuweisen. Wie mir scheint, bestehen die einzig realistischen Aufgaben zu WS 4.1 darin, in Standardformeln für $\varepsilon_1(X)$ und $\varepsilon_2(X)$ einzusetzen.

Vielleicht wäre es einfacher und trotzdem sinnvoll, statt der Konfidenzintervalle Hypothesentests aufzunehmen. Dabei geht es nicht um ein Intervall, in dem der gesuchte Parameter hoffentlich liegt, sondern darum, ob eine den gesuchten Parameter betreffende Behauptung, genannt „Nullhypothese" H_0, durch eine Stichprobe hinreichend gestützt oder widerlegt wird. H_0 könnte beispielsweise lauten: Die Münze ist fair, also $p = \frac{1}{2}$. Bei einem Test für diese Hypothese $p = \frac{1}{2}$ wäre ein Intervall $[a,b]$, in diesem Fall sinnvollerweise mit $a < \frac{1}{2} < b$, anzugeben derart, dass $\tilde{p}$, aufgefasst als Zufallsgröße, dann mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit in $[a,b]$ landet, sofern der unbekannte Parameter tatsächlich $p = \frac{1}{2}$ ist. Erhält man jedoch ein $\tilde{p}$ außerhalb dieses Bereichs, nimmt man das zum Anlass, H_0 zu verwerfen. Die logische Struktur kann man als eine mit Wahrscheinlichkeiten behaftete Variante eines indirekten Beweises ansehen. Auch eine Assoziation zum berühmten Popperschen Falsifizierungsprinzip liegt nahe, wonach Theorien in empirischen Wissenschaften falsifiziert, aber nicht verifiziert werden können. Auf sehr ähnliche asymmetrische Weise ist bei einem Test das Annehmen einer Nullhypothese H_0 weniger aussagekräftig als, sofern es die Daten rechtfertigen, das Verwerfen von H_0, denn: Bei einem Schätzwert $\tilde{p}$ nahe bei $\frac{1}{2}$ ist jeder der (unendlich vielen) Werte $p \neq \frac{1}{2}$, wenn er nur sehr nahe bei $\tilde{p}$ liegt, kaum weniger plausibel als exakt $p = \frac{1}{2}$ (deshalb keine „Verifikation" von H_0). Umgekehrt wäre aber $p = \frac{1}{2}$ äußerst unplausibel, wenn $\tilde{p} = \frac{k}{n}$ weit weg von $\frac{1}{2}$ liegt (in diesem Sinne also „Falsifikation" von H_0).

Die Beispiele, die ich für Konfidenzintervalle und Hypothesentesten gegeben habe, sind so ziemlich die einfachsten, an denen das Typische sichtbar wird. Die Logik hinter dem Testen dürfte etwas leichter zugänglich sein. Denn auch für einzelne Werte von p (in obigem Beispiel $p = \frac{1}{2}$) gibt es sinnvolle Tests, während beim Konfidenzintervall unweigerlich ein zusätzlicher versteckter Allquantor im Spiel ist (im Beispiel: $\forall p \in [0,1]$) . Überdies sind die oben angedeuteten Verbindungen zu indirektem Beweis und Falsifikation von übergeordnetem Interesse. Im Hinblick auf Bildungsstandards, Lehrplan, GKK, etc. könnte es sich lohnen, all das breiter zu diskutieren.

3 Epilog

Abschließend sollen aus den bisher beobachteten Einzelheiten Diagnosen auf allgemeiner Ebene abgeleitet (3.1) und nochmals mit konkreten Beispielen in Verbindung gebracht werden (3.2). Aus der Feststellung von Defiziten ergeben sich umgekehrt auch Anliegen, was man im Hinblick auf eine Verbesserung bedenken sollte (3.3). Am Ende stehen ein Schlussresümee (3.4) und eine Danksagung (3.5).

3.1 Systematisches Defizit bei Begrifflichkeit und Sprache

In Kapitel 2, dem Hauptteil dieses Textes, habe ich über das Problematische einzelner GKen im aktuellen GKK gesprochen. Ich halte das für notwendig, weil es, soweit ich es überblicke, in dieser Breite überhaupt noch nie getan worden ist. Alleine die Quantität der mathematischen Mängel, die dabei zum Vorschein kommen, vermag doch zu erstaunen. Dennoch ist es notwendig, die Problemanalyse neben der Aufzählung einzelner Mängel auch auf einer grundsätzlichen Ebene voranzutreiben. Welche allgemeinen Tendenzen, mit denen viele der aufgezeigten Einzelprobleme zusammenhängen, lassen sich identifizieren?

Vor allem orte ich eine Blindheit gegenüber der Rolle der Sprache und, damit eng zusammenhängend, begrifflicher Klarheit. Im Mathematikunterricht hat man sich völlig abgewöhnt, Fragen der Form „Was ist ein(e) . . . ?“ zu stellen. Anstatt Verständnis zu entwickeln und den Dingen auf den Grund zu gehen, werden sogenannte Kompetenzen erworben und bei Prüfungen eingefordert, sonst nichts. (Es klingt wie: „Brauchbare Maschinen haben Funktionen, brauchbare Menschen haben Kompetenzen.“) Natürlich ist es eine anspruchsvolle Herausforderung, Prüfungsaufgaben auf Verständnis statt auf Kompetenzen auszurichten. Wenn man sich aber wie im GKK fast völlig auf solche Kompetenzen beschränkt, wo man etwas „können“ oder „kennen“ muss, so legt man sich ohne Not Fesseln an. Was das in der Praxis heißt, lässt sich – zugegebenermaßen polemisch überspitzt – so formulieren: Bei „können“ hat man den richtigen bedingten Pawlowschen Reflex auszulösen, bei „kennen“ hat man zu nicken und eventuell eine Zuordnung zu treffen, zum Beispiel zwischen Grafiken aus einer Liste und Schlagworten aus einer anderen Liste. Manchmal reicht es sogar, ein Schlagwort, das eine Kompetenz nur bezeichnet, wiederzuerkennen, um dadurch die Kompetenz selbst, für die das Schlagwort ursprünglich gestanden ist, attestiert zu bekommen. Böse Zungen meinen, dass sich im Laufe der Zeit alles nur mehr auf eine einzige Kompetenz konzentriere: die Inkompetenzkompensationskompetenz. Als vor Jahren das Schlagwort von den „Kompetenzen“ im Bildungsbereich ubiquitär wurde, war ich angesichts kritischer Haltungen, wie sie etwa in [4] zum Ausdruck kommen, noch geneigt einzuwenden, dass Diskussionen um die Wortwahl nur Schall und Rauch seien. Doch frage ich unter dem Gesichtspunkt SSAE: Kommt ein GKK, der neben „können“ und gelegentlich „kennen“ kaum noch weitere Zeitwörter verwendet, nur mir wie eine Parodie seiner selbst vor?

Damit ich mich aber nicht in einem leeren Streit um Worte verfange, möchte ich mich auf die Suche nach konstruktiven Perspektiven begeben. Dazu rufe ich zunächst eine erkenntnistheoretische Selbstverständlichkeit in Erinnerung: Überall dort, wo Menschen versuchen, bestimmte Aspekte der sie umgebenden Wirklichkeit zu verstehen, werden Begriffe gebildet. Zunächst entstehen sie vielleicht nur im Bewusstsein eines Einzelnen. Oft ergeben sich diese Begriffe als Abstraktionen, indem man aus einer chaotischen Flut von Einzelphänomenen gewisse herausgreift, unter denen man eine Ähnlichkeit wahrzunehmen meint. Für das Gemeinsame der untereinander ähnlichen Einzelphänomene soll dann der neu zu prägende Begriff stehen. In der Mathematik und auch generell kann die Bildung eines neuen und klaren Begriffs einen wichtigen, manchmal sogar entscheidenden Erkenntnisfortschritt bedeuten. Doch sind wir nicht nur erkennende, wir sind auch soziale Wesen. Der einzelne Mensch ist verloren ohne seine Mitmenschen. Deshalb wollen wir über die Begriffe, mit denen wir unsere Vorstellung von der Welt strukturieren, auch „kommunizieren“, d.h. sie „vergemeinschaften“. Das bedeutet mehr als Informationsübertragung in eine Richtung. Deshalb hat uns die Evolution unsere Sprachfähigkeit entwickeln lassen. Begriffsbildung und Versprachlichung werden so zum allgemeinmenschlichen Fundament jeglicher Wissenschaft, ja unserer gesamten Zivilisation.

Die Mathematik hat daran nicht nur Anteil, sie ist geradezu *das* Musterbeispiel für den Prozess der Begriffswerdung (meist durch Abstraktion) und ihrer Verbalisierung. Und just im Mathematikunterricht werden diese Potenziale des menschlichen Bewusstseins, auf das sich unsere Spezies so viel zugutehält, traditionell sträflich vernachlässigt.

Um Missverständnisse zu vermeiden, möchte ich bei dieser Gelegenheit betonen, dass bei der Versprachlichung von Mathematik nicht das Vokabular der Fachsprache das primär Interessante ist. Vielmehr geht es um die Möglichkeit der Sprache, mithilfe von bereits etablierten Begriffen neue präzis zu definieren und dann ebenso präzis Aussagen (Theoreme) darüber zu machen, die ihrerseits gleichfalls präziser Beweise bedürfen. Mathematische Formeln und Rechnungen sind nur Bestandteile komplexerer sprachlicher Äußerungen und dienen in der Regel zur Abkürzung und/oder zur besseren visuellen Wiedergabe einer abstrakten Struktur.

3.2 Nochmals ein paar Beispiele

Um meine wortreichen Behauptungen auch mit konkreten Inhalten zu füllen, will ich ein paar Beispiele aus dem Hauptteil rekapitulieren, die dafür stehen, wie im GKK großartige Gelegenheiten versäumt werden, Begriffsbildung und Versprachlichung anhand interessanter Mathematik zu schulen. Solche Beispiele finden sich in jedem der vier Themenbereiche des GKK.

Wenn ich bei AG 1.1 im Zusammenhang mit den natürlichen Zahlen (außerdem nach AN 1.4) das Induktionsprinzip erwähnt habe, liegt mir nicht primär daran, im Schulunterricht schematische Induktionsbeweise zu etablieren und dann zu drillen. Das wären nur *Anwendungen* des Induktionsprinzips. Das Induktionsprinzip selbst spiegelt eines der großen Aha-Erlebnisse wider, die die Mathematik zu bieten hat: Mit einer Formulierung wie zum Beispiel „Jede Menge von Zahlen, die 0 enthält und mit jedem n auch den Nachfolger $n+1$, muss bereits alle natürlichen Zahlen enthalten“ (ergänzt durch ein paar andere Banalitäten, Schlagwort Peano-Axiome) gelingt es, den Begriff vom Zahlenbereich $\mathbb{N}$ sprachlich so präzis zu fassen, dass damit mit voller mathematischer Strenge gearbeitet werden kann. Das lässt sich dann anhand von (mehr oder weniger schematischen) Induktionsbeweisen illustrieren, anwenden und, wenn man will, auch üben.

Relation, Funktion und Verkettung von Funktionen im Zusammenhang mit FA 1.1 sind weitere Beispiele, aus denen man schon im Unterricht wesentlich mehr herausholen könnte. Entsprechendes gilt für den den gesamten Themenbereich AN durchziehenden Grenzwertbegriff in seinen verschiedenen Ausprägungen. Aus der Stochastik schließlich erinnere ich an den fundamentalen Begriff der Wahrscheinlichkeit (siehe etwa die Ausführungen zu WS 2.1, 2.2. und 2.3) sowie den unmittelbar darauf aufsetzenden und für die gesamte Stochastik zentralen Begriff der Unabhängigkeit samt seiner Relevanz für das Problem, „Zufall“ philosophisch zu fassen (siehe WS 2.3 und anschließende Diskussion). Da ich diese Themen im Hauptteil über den GKK bereits besprochen habe, darf ich mich hier mit diesen kurzen Erwähnungen begnügen, die lediglich nochmals die Verbindung zwischen Allgemeinem und Konkretem belegen sollen.

3.3 (Schul-)Mathematik und (Gegen-)Aufklärung

Angesichts der weitreichenden Potenziale des Mathematikunterrichts wirkt das tatsächlich Umgesetzte wie eine lieblose Ansammlung von Fragmenten, die sich leider nicht selten in Belanglosigkeiten verlieren und vom Wesentlichen ablenken. Man könnte meinen, eine böse Allianz von Finstermännern hätte beschlossen, den Mathematikunterricht geradezu als Speerspitze der Gegenaufklärung zu instrumentalisieren. Doch sind solche Verschwörungstheorien natürlich irrational und bringen uns nicht weiter.

In einem Punkt fällt es aber schwer, weiter reichende Spekulationen zu unterdrücken. Und zwar geht es um die Verwendung des Computers. Es besteht kein Zweifel, dass er, unter klugem Einsatz der reichlich vorhandenen Software, für die Illustration mathematischer Inhalte didaktische Möglichkeiten eröffnet, die früheren Generationen noch nicht zur Verfügung standen. Ganz anders verhält es sich aber mit Prüfungen. Schon seit Jahren beobachte ich eine mir unverständliche Vehemenz, mit der von vielen Seiten der Einsatz das Computers auch als Prüfinstrument bei der Zentralmatura in Mathematik propagiert wird. Für diese Propaganda werden auch beträchtliche Ressourcen frei gemacht, während an anderen Stellen – etwa wenn es um die Behebung der in diesem Artikel aufgezeigten Mängel geht – Mittel für das Notwendigste angeblich fehlen. Meines Erachtens wiegen die Argumente gegen den Einsatz des Computers bei Prüfungen sehr schwer. Es gibt ja auch Gründe, dass an Universitäten selbst Computerspezialisten ersten Ranges sich bei Prüfungen nicht auf ihr Lieblingsinstrument verlassen. Im Zuge meiner Arbeit für die Zentralmatura habe ich meine Argumente gegen den Computereinsatz bei der Prüfung immer wieder vorgebracht. Die Beharrlichkeit, mit der darauf nicht einmal eingegangen wurde, lässt mich mit Cicero fragen: Cui bono?

Sehr klar rational fassbar und verstehbar sind hingegen solche Mechanismen, wo eines ins andere greift und schließlich in unerwünschte Resultate mündet, obwohl keiner der Beteiligten sie beabsichtigen konnte. Bereits eingangs habe ich in 1.1 jene Dynamik der früheren Form der Mathematikmatura skizziert, die ein vom Lehrer bestimmtes „teaching to the test" nach sich gezogen hatte. Dabei wurden nur einige wenige, teils artifiziell komplizierte Aufgabentypen gedrillt, ohne dabei das Verständnis für das Wesentliche zu fördern. Neuerdings ist die Zahl der verschiedenen Aufgabentypen, auf die sich das nunmehr durch den GKK bestimmte „teaching to the test" in Zukunft zu konzentrieren droht, zwar etwas größer. Dafür findet das allermeiste auf viel geringerem Komplexitätsniveau statt. Was einem lieber ist (oder eigentlich: wovor einem mehr graut), dürfte Geschmackssache sein.[7] Als Rechtfertigung für die Systemumstellung auf die Zentralmatura kann ihre gegenwärtige Praxis jedenfalls noch nicht wirklich überzeugen. Es wäre sehr bedauerlich, wenn das so bliebe. Was also wäre zu tun?

Manches geht aus dem bisher Gesagten bereits hervor. Außerdem verweise ich auf [7], wo ich bereits einige Vorschläge formuliert habe. Insbesondere behandle ich dort die meines Erachtens entscheidende Frage, wie man – etwa mithilfe permanenter Fluktuationen im Stoff – verhindern könnte, dass ein GKK, wie perfekt auch immer er im Idealfall ausformuliert sein mag, längerfristig zu einer Erstarrung mit entsprechendem „teaching to the test" führt.

Um der Aufklärung und nicht ihrem Gegenteil zuzuarbeiten (ich darf auch auf [8] verweisen), haben wir dem Mathematikunterricht zuallererst eine verfeinerungsfähige Sprache wiederzugeben. Wann und wo immer es intellektuell anspruchsvoll und damit erst interessant wird, dürfen wir nicht, wie es allem Anschein nach geradezu zum kollektiven Reflex geworden ist, aus übergroßem Respekt vor der didaktischen Herausforderung ausweichen und ängstlich den Kopf einziehen. Stattdessen sollten wir uns bemühen, möglichst viel Interessantes durch geschickte Adaption in den Mathematikunterricht hinüberzuretten. Das bedingt eine Bewusstheit für den begrifflichen Charakter der Mathematik und die dafür notwendige sprachliche Genauigkeit, die sich nicht in terminologischen Haarspaltereien erschöpfen darf, sondern logische Strukturen richtig wiedergeben soll.

[7] Als grundsätzlicher Befürworter der Zentralmatura bekenne ich, dass mir in diesem Punkt persönlich immer noch vor dem alten System mehr graut. Manches deutet darauf hin, dass bei der Zentralmatura auch in der gegenwärtig unbefriedigenden Situation trotz allem ein ganz kleines bisschen Mehr an echtem Verständnis hängen bleibt. Doch könnte ich mich da auch täuschen. Vor allem ist zu befürchten, dass ein dauerhaftes Beharren auf der aktuellen Version des GKK längerfristig sehr negative Auswirkungen zeitigen wird.

Auch der Lehrplan (siehe [2]), vor allem in seinem (teilweise hervorragenden!) allgemeinen Teil könnte dazu einen wertvollen Beitrag leisten. Wer sich bei der Gestaltung von Prüfungen und erst recht im Unterricht die sechs darin verankerten Aspekte der Mathematik zu Herzen nimmt, kann kaum fehlgehen. Was dort mit wenigen Schlagworten über den „schöpferisch-kreativen“, den „sprachlichen“, den „erkenntnistheoretischen“, den „pragmatisch-anwendungsorientierten“, den „autonomen“ und den „kulturell-historischen“ Aspekt gesagt wird, deckt bei sinnvoller Interpretation den allergrößten Teil dessen ab, was einem an Mathematik wichtig sein kann. Das ursprüngliche bildungstheoretische Konzept der AHS-Zentralmatura von Roland Fischer und Werner Peschek fügt sich da sinnvoll ein, auch wenn eine vier- oder fünfstündige Prüfung natürlich nicht alles testen kann, was man sich von einem Mathematikunterricht, der sich über immerhin zwölf Schuljahre erstreckt, erhofft.

Ich möchte auch auf das Projekt „Mathematik macht Freu(n)de“ (siehe [3]) hinweisen, im Rahmen dessen Michael Eichmair von der Universität Wien und sein Team seit ein, zwei Jahren u.a. sehr empfehlenswerte Unterrichtsmaterialien für Schüler entwickeln. Vielleicht können derartige Errungenschaften auch für die Zentralmatura nutzbar gemacht werden.

3.4 Schlussresümee

Die aktuelle Organisation und Gestaltung der AHS-Zentralmatura in Mathematik hat zur Folge, dass der Katalog der insgesamt nur 73 sogenannten Grundkompetenzen mittlerweile zur übermächtigen Instanz geworden ist, an der sich zunehmend der gesamte Unterricht orientiert. Ist schon dieser Umstand allein nicht wünschenswert, so irritiert mindestens ebenso sehr, welche ganz konkreten mathematischen Mängel darin schon seit mehreren Jahren anscheinend widerspruchslos hingenommen werden. Eines meiner Anliegen im vorliegenden Text ist die Diagnose solcher Mängel sowie die Argumentation, warum ihre Auswirkungen höchst bedenklich sind und nicht widerstandslos hingenommen werden dürfen. Dagegen aufzutreten, liegt in der Verantwortung von uns Mathematikern.

Mit der kosmetischen Ausbesserung der erwähnten Fehler wird man sich nicht zufriedengeben dürfen. Längerfristig wären viel tiefer greifende Initiativen erforderlich, die neben dem Katalog der Grundkompetenzen auch den Lehrplan betreffen, außerdem die Erstellung von Unterlagen für die Lehrerschaft, etc. Wie solche Initiativen aussehen könnten, habe ich in diesem Text bestenfalls angedeutet; etwas mehr dazu findet sich in [7].

Die Zentralmatura könnte eine Chance sein, den Mathematikunterricht an Österreichs Höheren Schulen auf ein neues und tragfähigeres Fundament zu stellen. Zurzeit drohen die Entwicklungen aber in die verkehrte Richtung zu laufen. Deshalb appelliere ich an die fachmathematische Gemeinschaft in Österreich, diese

Entwicklungen kritisch zu beobachten, die vielen Argumente, die für oder gegen die unterschiedlichsten Pläne vorgebracht werden, mit Sachverstand zu prüfen und sich zu Wort zu melden, wann immer es notwendig erscheint.

3.5 Danksagung

Ich danke Gerhard Dorfer, Michael Fischer, Clemens Fuchs, Martin Goldstern, Gernot Greschonig, Gregor Kastner, Manfred Kronfellner und Gerald Kuba für wertvolle Verbesserungsvorschläge zu einer Vorversion des vorliegenden Artikels.

Literatur

[1] V. Aue et al. *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik*. Am 24.1.2018 online verfügbar unter:
`https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf`

[2] Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. *AHS-Lehrpläne Oberstufe neu: Mathematik*. Am 30.1.2018 online verfügbar unter:
`https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf`

[3] M. Eichmair et al. *Mathematik macht Freu(n)de.* Am 31.1.2018 online verfügbar unter:
`http://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at/`

[4] K.-H. Graß. *Kompetenzorientierung – Gefahren bei der Implementierung und ökonomische Einflüsse.* Internat. Math. Nachrichten, 232 (2016), 25-45.

[5] R. Winkler. *Im Anfang war die Exponentialfunktion*. Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft – Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen, 44 (Jänner 2012), 98-109. Auch im Internet verfügbar unter:
`http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/exp.pdf`

[6] R. Winkler. *Stochastik – ein Fest der Unabhängigkeit*. Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft – Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen, 45 (2012), 122-136. Auch im Internet verfügbar unter:
`http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/stochastik.pdf`

[7] R. Winkler. *Zentralmatura – quo vadis?* Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft – Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen, 49 (2016), 131-144. Auch im Internet verfügbar unter:
`http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/quo-vadis.pdf`

[8] R. Winkler. *Mathematik als zentraler Teil des Projektes Aufklärung auf breiter Front*. Soll 2018 erscheinen in: *Mathematik und Gesellschaft. Historische, philosophische und didaktische Perspektiven.* Herausgeber: G. Nickel, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink, M. Rathgeb. Springer Spektrum.

Adresse des Autors:
Reinhard Winkler
TU Wien
Wiedner Hauptstr. 8
A-1040 Wien
email reinhard.winkler@tuwien.ac.at