Львівський національний університет
імені Івана Франка

Н а   п р а в а х   р у к о п и с у

Здомський Любомир Сергійович

УДК 512.5+515.1

Локальні та комбінаторні властивості топологічних груп

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Банах Тарас Онуфрійович,
доктор фізико-математичних
наук, професор

Львів - 2006

ВСТУП

Актуальність теми.

Проблема дослідження впливу алгебраїчної структури, узгодженої з топологією, на локальні властивості топологічного простору бере свої витоки ще у працях класиків топологічної алгебри. Так, зокрема, в середині 30-х років Г. Бірхоф [41] і Ш. Какутані [57] довели, що кожна топологічна група з першою аксіомою зліченності є метризовною, що далеко не так у загальному випадку топологічних просторів. Це зумовило подальші дослідження зв'язку між локальною будовою топологічних груп та їх властивостями типу метризовності.

Одним з найважливіших узагальнень метризовності є субметризовність, тобто існування неперервної метрики. Згідно з класичним результатом Ф. Гаусдорфа про можливість продовження метрики з замкненого підпростору метричного простору на весь простір, клас субметризовних просторів включає в себе зліченні індуктивні границі метричних просторів, тобто $\mathcal{M}_\omega$-простори. Як показано в [30], кожна $\mathcal{M}_\omega$-група містить відкриту субметризовну k_ω-підгрупу, тобто субметризовну підгрпу, топологічний простір якої є індуктивною границею компактів. Топологічна класифікація зліченних k_ω-топологічних груп встановлена Є.Г. Зеленюком [16]. Пізніше вона була узагальнена Т. Банахом у [32] на клас нульвимірних субметризовних $\mathcal{M}_\omega$-груп. З огляду на ці результати природньо виникла задача знаходження локальних властивостей топологічних груп, які б характеризували $\mathcal{M}_\omega$-групи. Однією з таких властивостей в класі секвенціальних топологічних груп є зліченність cs*-характера, кардинального інваріанта введеного у спільній роботі [35] автора і його наукового керівника Т. Банаха.

cs*-Характер є локальним аналогом поняття cs*-сіткової ваги топологічного простору введеного З.М. Гао (див. оглядову статтю [79, ст. 142]), яке стало предметом детального розгляду в роботах Й. Нагати, К. Моріти, С. Ліна, Й. Танаки (див. [65], [79] і [61]) та багатьох інших. В свою чергу cs*-сітки є природнім секвенціальним узагальненням k-сіток введених

Е. Майклом з метою характеризації образів метричних сепарабельних просторів при компактно-накриваючих відображеннях. Топологічні групи з точково-зліченною k-сіткою досліджувалися А. Шібаковом [78], який довів метризовність таких груп при умові зліченності секвенціального порядку.

Іншим напрямком топологічної алгебри, де природньо виникли (субметризовні) k_ω-групи є теорія вільних топологічних груп. Розв'язуючи проблему існування гаусдорфової топологічної групи, яка б містила замкнену копію тихонівського простору X, А.А. Марков [17] в 40-х роках минулого століття ввів поняття вільної (абелевої) топологічної групи $F(X)$ над тихонівським простором X. Невдовзі М.І. Граєв [11] показав, що вільна група над компактом є k_ω-простором. Проте питання характеризації топологічних просторів X, для яких $F(X)$ є індуктивною границею своїх підпросторів, що складаються зі слів обмеженої довжини, виявилось складним навіть у класі метризовних просторів і було розв'язане В.Г. Пестовим і К. Ямадою у роботі [68] наприкінці 90-х. Таким чином постали питання про відповідність між властивостями тихонівського топологічного простору і його вільної (абелевої) групи.

Одною з таких властивостей топологічних груп є (сильна) o-обмеженість, яка введена О.Г. Окунєвим з метою характеризації підгруп ліндельофових груп. У 2000-му році М.Г. Ткаченко, К. Хернандес і Д. Робі у спільній роботі [52] довели, що вільна група над одноточковою ліндельофікацією довільного дискретного простору є сильно o-обмеженою, і поставили питання про характеризацію топологічних просторів, вільна (абелева) група над якими є (сильно) o-обмеженою. Властивостям (сильної) o-обмеженості топологічних груп присвячено ряд недавніх робіт Т.О. Банаха, П. Ніколаса, та М. Санчіса [34], Т.О. Банаха [33], М.Г. Ткаченка [84], Л. Бабінкостової, Л. Косінача, М. Скіперза [29], Л. Бабінкостової [28], Б. Цабана, М. Махури [62], А. Кравчика, М. Міхалєвського [59] та багатьох інших. Тут варто відзначити, що відповідна характеризація ω-обмеженості отримана І.Й. Гураном в його дисертації [13] на початку 80-х.

Сильна o-обмеженість топологічних груп визначається у термінах комбінаторних властивостей рівномірних покриттів по відношенню до її лівої рівномірності. Тому грунтуючись на вищезгаданому результаті Гурана природньо було очікувати (а саме так і виявилось), що властивості тихонівського простору, що відповідають (сильній) o-обмеженості є також певними комбінаторними умовами на сім'ю рівномірних покриттів простору у його універсальній рівномірності. Такі умови відомі в теоретико-множинній топології під назвою *селекційні принципи.* Історично перші селекційні принципи були введені на початку попереднього століття у роботах К. Менгера [64] і В. Гуревича [54]. Їхній розгляд отримав новий поштовх в роботах [7], [76], [55], [37] та багатьох інших.

М.І. Граєв [11] для доведенні існування вільної топологічної групи використав метод продовження псевдометрик з тихонівского простору на вільну групу над ним. Подібні міркування дозволяють продовжити топологію з абелевої групи на її подільну оболонку.

Класичним результатом теорії абелевих груп є теорема Бера про те, що кожна абелева група G є підгрупою подільної групи, див [24, Теор. 24.1]. Більш того, серед всіх таких подільних груп є мінімальна в природньому розумінні, яку принято називати подільною оболонкою групи G, див. [24, Теор. 24.4]. Т.О. Банах на Львівському топологічному семінарі поставив питання про те, чи можна продовжити топологію з абелевої топологічної групи на її подільну оболонку зі збереженням ваги та індексу обмеженості. Дане питання природньо виникло при розв'язуванні ним спільно з А. Загороднюком і А.М. Плічком проблеми про автоматичну неперервність поліноміальних операторів між абелевими топологічними групами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Тематика дисертації пов'язана з науково-дослідними роботами "Асимптотичні властивості голоморфних функцій, алгебро-топологічні структури та їх застосування" (номер державної реєстрації МГ-79Б), "Тополого-алгебраїчні структури та їх застосування" (номер державної реєстрації МТ-

224Б)

Мета і завдання долідження.

Локальна характеризація топологічних груп, які є індуктивними границями метричних (компактних) підпросторів. Опис тихонівських просторів, вільна (абелева) топологічна група над якими є [сильно] o-обмеженою. Доведення l-інваріантності властивостей Гуревича, Скіперза та Менгера. Продовження топології абелевої топологічної групи на її подільну оболонку зі збереженням деяких кардинальних інваріантів.

Об'єкт дослідження – топологічні групи зі зліченним cs*- характером; вільні (абелеві) топологічні групи; подільні топологічні групи.

Предмет дослідження – структура топологічних груп зі зліченним cs*-характером; комбінаторні властивості відкритих покриттів топологічних просторів, вільні групи над якими є (сильно) o-обмеженими; топологізації подільних оболонок абелевих топологічних груп.

Методи дослідження. У першому розділі розвинуто і використано при характеризації топологічних груп зі зліченним cs*-характером метод секвенціальних дерев. Наріжним каменем другого розділу є метод мультипокритих просторів, за допомогою якого доведено характеризіцію топологічних просторів, вільні групи над якими є (сильно) o- обмеженими. Доведення основного результату третього розділу базується на методі продовження псевдонорм з підгрупи на групу розвинутому М.І. Граєвим в [11] при побудові вільних топологічних груп.

Наукова новизна одержаних результатів.

У дисертації отримано такі нові результати:

1. В першому розділі введено поняття секвенціального дерева, яке виявилось корисним при розгляді локальної будови підмножини секвенціального простору в околі її граничної точки. Використовуючи це поняття, доведено наступні нові результати:

   – кожна секвенціальна топологічна група G зі зліченним cs*-характером є субметризовною. Більш точно, або G метризовна, або містить відкриту субметризовну k_ω-підгрупу H.

– при континуум гіпотезі (більш детально, при $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$) існує секвенціальний топологічно однорідний нульвимірний k_ω-простір X зі зліченним cs*-характером і незліченним псевдохарактером.

2. В другому розділі узагальнено селекційні властивості топологічних груп і просторів на мультипокриті простори і, використовуючи цей загальний підхід, отримано наступні нові результати:

   – вільна абелева група над ліндельофовим простором X є o-обмежено тоді і лише тоді коли X має властивість Скіперза, тобто для довільної послідовності $(u_n)_{n\in\omega}$ відкритих покриттів простору X існує послідовність $(v_n)_{n\in\omega}$, де кожне v_n є скінченною підмножиною u_n, і для кожної скінченної підмножини $K \subset X$ існує $n \in \omega$ з властивістю $K \subset \cup v_n$;

   – вільна (абелева) група над ліндельофовим простором X є сильно o-обмежено тоді і лише тоді, коли другий гравець має виграшну стратегію у грі Менгера на просторі X.

3. В третьому розділі отримано наступні нові результати:

   – довільну гаусдорфову групову топологію на абелевій топологічній групі продовжено на її подільну оболонку зі збереженням ваги, характеру та індексу обмеженості;

   – побудовано польську абелеву топологічну групу без кручення, яка не є підгрупою подільної аналітичної топологічної групи.

Практичне значення одержаних результатів.

Дисертація має теоретичний характер. Результати отримані в ній можуть бути використані в топологічній алгебрі, функціональному аналізі, а також в загальній топології.

Особистий внесок здобувача.

Результати першого та третього розділів дисертації є спільними результатами здобувача і його наукового керівника проф. Т.О. Банаха. Обидва співавтори зробили однаковий внесок у їхнє доведення. Результати другого розділу отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертації доповідались на конференції молодих вчених механіко-математичного факультету Московсько державного університету (2002р.), на міжнародній конференції з функціонального аналізу і його застосувань присвяченій 110-й річниці з дня народження Стефана Банаха (Львів 2002р.), міжнародній конференції "Геометрична топологія: нескінченновимірна топологія, абсолютні екстензори" (Львів 2004р.), теоретико-множинному семінарі центру логічних досліджень імені Курта Гьоделя (Відень 2005р.), конференції "Покриття, селекції, та ігри в топології" (Італія, м. Лечче 2005р.), один раз на львівському алгебраїчному семінарі, та кілька разів на львівському топологічному семінарі протягом 1999-2005 років.

Публікації.

Результати дисертації опубліковані у статтях [35], [36], [93], і [94]. З них три ([35], [93], і [94]) в журналах із переліку, затвердженого ВАК України. Дві статті ([93] і [94]) без співавторів.

Структура і об'єм дисертації.

Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел, який займає 8 сторінок і включає 95 найменувань. Загальний обсяг праці 111 сторінок.

РОЗДІЛ 1

Топологічна структура (топологічно однорідних) просторів і груп зі зліченним cs*-характером.

1.1. Огляд літератури та результатів розділу.

В цьому розділі ми вводимо і вивчаємо три нових локальних кардинальних інваріанти топологічних просторів, а саме sb-характер, cs-характер і cs*-характер, а також описуємо структуру секвенціальних топологічних груп зі зліченним cs*-характером.

Усі ці характери грунтуються на понятті *сітки* в точці x топологічного простору X, під якою ми розуміємо таку сім'ю $\mathcal{N}$ підмножин X, що для довільного околу $U \subset X$ точки x існує елемент $N \in \mathcal{N}$ з властивістю $x \in N \subset U$, див. [61].

Підмножина B топологічного простору X називається *секвенціальним бар'єром* в точці $x \in X$, якщо для довільної послідовності $(x_n)_{n\in\omega} \subset X$ збіжної до x існує таке $m \in \omega$, що $x_n \in B$ для всіх $n \geq m$, див. [61]. Зрозуміло, що кожний окіл точки $x \in X$ є секвенціальним бар'єром в ній, в той час, як обернене твердження не вірне (контрприкладом є простір Аренса, див. [61].)

Під sb-*сіткою* в точці x топологічного простору X ми розуміємо сітку в точці x, елементи якої є секвенціальними бар'єрами в точці x. Іншими словами, сім'я $\mathcal{N}$ підмножин простору X є sb-сіткою в точці x, якщо для довільного околу U точки x існує такий елемент N сім'ї $\mathcal{N}$, що для довільної послідовності $(x_n) \subset X$ збіжної до x множина N містить майже всі елементи послідовності (x_n). Переставляючи два квантори у цьому означенні, ми отримаємо означення cs-сітки в точці x.

А саме, сім'я $\mathcal{N}$ підмножин топологічного простору X називається *cs-сіткою* (відп. cs*-*сіткою*) в точці $x \in X$, якщо для довільного околу $U \subset X$

точки x і довільної послідовності $(x_n) \subset X$ збіжної до x існує такий елемент $N \in \mathcal{N}$, що $N \subset U$ і N містить майже всі (тобто всі за винятком, можливо, скінченного числа) (відп. нескінченну кількість) елементів послідовності (x_n). Сім'я $\mathcal{N}$ підмножин топологічного простору X називається cs-*сіткою* (відп. cs*-*сіткою*), якщо вона є cs-сіткою (відп. cs*-сіткою) в кожній точці $x \in X$, див. [65].

Найменшу потужність $|\mathcal{N}|$ sb-сітки (відп. cs-сітки, cs*-сітки) $\mathcal{N}$ в точці $x \in X$ називатимемо sb-*характером* (відп. cs-*характером,* cs*-*характером*) простору X в точці x, і позначатимемо $\mathrm{sb}_\chi(X,x)$ (відп. $\mathrm{cs}_\chi(X,x)$, $\mathrm{cs}^*_\chi(X,x)$). Кардинали $\mathrm{sb}_\chi(X) = \sup_{x\in X} \mathrm{sb}_\chi(X,x)$, $\mathrm{cs}_\chi(X) = \sup_{x\in X} \mathrm{cs}_\chi(X,x)$ і $\mathrm{cs}^*_\chi(X) = \sup_{x\in X} \mathrm{cs}^*_\chi(X,x)$ називатимемо sb-*характером*, cs-*характером* і cs*-*характером* топологічного простору X відповідно. Для порожнього топологічного простору $X = \emptyset$ покладемо $\mathrm{sb}_\chi(X) = \mathrm{cs}_\chi(X) = \mathrm{cs}^*_\chi(X) = 1$.

Надалі будемо говорити, що топологічний простір X має *зліченний* sb-*характер (відп.* cs-*,* cs*-*характер*), якщо $\mathrm{sb}_\chi(X) \le \aleph_0$ (відп. $\mathrm{cs}_\chi(X) \le \aleph_0$, $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \le \aleph_0$).

Варто зауважити, що в інших термінах топологічні простори зі зліченним sb- чи cs-характером вже виникали в топологічній літературі. Топологічний простір X має зліченний sb-характер тоді і лише тоді коли він є універсально csf-зліченним[1] в сенсі [61]. У класі секвенціальних T_1-просторів зліченність sb-характеру є еквівалентною до слабої першої аксіоми зліченності[2], введеної О.В. Архангельським в [1], і до o-метризовності[3], введеної С.Й. Нєдєвим в [20]. (Нагадаємо з [15, ст. 94], що топологічний простір X є

[1]Згідно з [61, Def. 2.7], топологічний простір X є універсально csf-зліченним, якщо існує сім'я $\mathcal{N} = \bigcup\{\mathcal{N}_x : x \in X\}$ підмножин простору X, де для кожного $x \in X$ сім'я $\mathcal{N}_x$ є зліченною сіткою топології простору X в точці x, кожен елемент якої є секвенціальним бар'єром в точці x.

[2]Згідно з [1, Опр. 2.3], топологічний простір X задовільняє слабу першу аксіому зліченності, якщо його топологію можна задати слабою базою $T_C = \{T_x : x \in X\}$, в якій кожна сім'я T_x є зліченною. Слабою базою називається сім'я $T_C = \{T_x : x \in X\}$, для якої T_x є замкненою відносно скінченних перетинів сім'єю підмножин простору X, кожна з яких містить точку x. Підмножина $U \subset X$ є відкритою в топології, що задається слабкою базою $T_C = \{T_x : x \in X\}$, якщо для кожного $x \in U$ існує $Q(x) \in T_x$ для якого $Q(x) \subset U$.

[3]O-метрикою на множині X називається довільна функція з множини X в множину невід'ємних дійсних чисел, див [20, ст. 201]. Кожна o-метрика ρ задає топологію τ_ρ на множині X, в якій множина F є замкненою тоді, і тільки тоді, коли $\{\inf \rho(x,y) : y \in F\} > 0$ для всіх $x \notin F$.

секвенціальним, якщо підмножина $A \subset X$ є замкненою тоді і лише тоді, коли вона містить граничну точку довільної збіжної послідовності $(a_n)_{n\in\omega} \subset A$.) Топологічний простір має зліченний cs-характер тоді і лише тоді, коли він є csf-зліченним згідно з [61].

Оскільки кожний топологічний простір з першою аксіомою зліченності має зліченний cs*-характер, природньо розглядати клас топологічних просторів зі зліченним cs*-характером як клас узагальнених метричних просторів. Щоправда, через існування "дуже неметризовних" просторів, які не містять нетривіальних збіжних послідовностей (прикладом такого простору є $\beta\mathbb{N}$, Стоун-Чехівська компактифікація дискретного простору натуральних чисел), природньо розглядати зліченність вищевведених характерів у поєднанні з секвенціальністю. Зокрема для топологічних груп, де згідно з класичним результатом Бірхофа і Какутані [14, Теор. 4.10] зліченність характеру еквівалентна до метризовності, природньо виникає питання про співвідношення зліченності sb- і cs-характерів з метризовністю в класі секвенціальних груп. У випадку sb-характеру відповідь на це питання дана М.М. Чобаном і С.Й. Нєдевим у роботі [19]: секвенціальна топологічна група зі зліченним sb-характером є метризовною. Проте клас секвенціальних топологічних груп зі зліченним cs-характером містить прості неметризовні приклади, наприклад $\mathcal{M}_\omega$-групи. Під *$\mathcal{M}_\omega$-групою* ми розуміємо топологічну групу, топологічний простір якої є $\mathcal{M}_\omega$-простором, тобто зліченною індуктивною границею своїх метризовних підпросторів. В наступній теоремі[4], яка є основним результатом цього розділу, стверджується, що $\mathcal{M}_\omega$-групами вичерпуються всі секвенціальні топологічні групи зі зліченним cs-характером. Таким чином ми поширюємо вищенаведений результат Нєдєва і Чобана.

Theorem 1.16. *Кожна секвенціальна топологічна група G зі зліченним* cs*-*характером є субметризовною. Більш точно, або G є метризовною, або ж G містить відкриту субметризовну k_ω-підгрупу H.*

Топологічна структура зліченних k_ω-груп досліджувалася Е.Г. Зеленю-

[4]В даному підрозділі всі теореми мають ті ж номери, що і відповідні їм (можливо, більш загальні) теореми в подальших підрозділах цього розділу

ком у роботі [16], де доведено, що дві такі групи є гомеоморфними тоді і лише тоді, коли їхні ранги розрідженості компактів співпадають (див. також [71, §4.3]). Цей результат узагальнено Т. О. Банахом на клас неметризовних пунктіформних $\mathcal{M}_\omega$-груп в роботі [32], де показано, що їхня топологічна структура визначається щільністю і рангом розрідженості компактів. В поєднанні з характеризацією $\mathcal{M}_\omega$-груп як груп зі зліченним cs-характером, це дає топологічну класифікацію неметризовних пунктіформних секвенціальних груп зі зліченним cs-характером.

Theorem 1.19. *Неметризовні секвенціальні пунктіформні топологічні групи G, H зі зліченним* cs^**-характером є гомеоморфними тоді і лише тоді, коли* $d(G) = d(H)$ *і* $\mathrm{scr}(G) = \mathrm{scr}(H)$.

(Нагадаємо, що топологічний простір X є *пунктіформним*, якщо X не містить компактних зв'язних неодноточкових підпросторів, див. [48, 1.4.3]. Зокрема, кожен нульвимірний топологічний простір є пунктіформним.

Під *рангом розрідженості компактів* топологічного простору X розумітимемо ординал $\mathrm{scr}(X) = \sup\{\mathrm{sch}(K) : K$ є розрідженим компактним підпростором простору $X\}$, де $\mathrm{sch}(K)$ є *рангом Кантора-Бендиксона* топологічного простору K, тобто найменшим ординалом α з властивістю $X_{(\alpha+1)} = X_{(\alpha)}$ (див. [58, 6.12]). Тут для кожного ординалу α α-та похідна $X_{(\alpha)}$ топологічного простору X визначається по трансфінітній індукції наступним чином: $X_{(1)}$ є множиною всіх неізольованих точок простору X, і $X_{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha}(X_{(\beta)})_{(1)}$. Топологічний простір X є *розрідженим*, якщо $X_{(\alpha)} = \emptyset$ для деякого ординала α.)

cs-Сітки є природнім секвенціальним узагальненням k-сіток введених П. О'Меара (див. [79, ст. 139]), де сім'я підмножин $\mathcal{A}$ топологічного простору X називається *k-сіткою*, якщо для довільного компакта $K \subset X$ і відкритої підмножини $U \supset K$ існує скінченна підсім'я $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, для якої $K \subset \cup\mathcal{A}' \subset U$. Як показано А. Шібаковим у [78], секвенціальні топологічні групи з точково-зліченною k-сіткою є метризовними тоді і лише тоді, коли їхній секвенціальний порядок є зліченним (означення секвенціального порядку дане в підрозділі 1.3). Також відомо [30], що кожна неметризовна $\mathcal{M}_\omega$-група містить відкриту k_ω-підгрупу, і тому її ліва рівномірність є повною згідно з [71, Th. 4.1.6]. Ці та інші властивості неметризовних субметризовних k_ω-груп у поєднанні з Теоремою 1.16 дають ряд достатніх умов метризовності секвенціальних топологічних груп зі зліченним cs*-характером.

Theorem 1.18. *Секвенціальна топологічна група G зі зліченним* cs**-характером є метризовною при виконанні однієї з наступних умов: 1)* $\mathrm{so}(G) < \omega_1$*; 2)* $\mathrm{sb}_\chi(G) < \mathfrak{d}$*; 3) G має властивість Фреше-Урисона; 4) G не містить копії віяла Фреше-Урисона; 5) G не є повною в своїй лівій рівномірності; 6) G є берівською.*

В вищенаведеній характеризації секвенцальних $\mathcal{M}_\omega$-груп суттєво використовується неперервність групової операції. Справді, Архангельським і Франкліном побудовано у роботі [27] (див. також [46, 10.1]) приклад зліченного топологічно однорідного k_ω-простору X, sb-характер якого є зліченним, але секвенціальний порядок цього простору рівний ω. Нещодавно Е. Зеленюк [95] показав, що кожен топологічно однорідний зліченний регулярний простір (зокрема X) є гомеоморфним до *квазітопологічної групи*, тобто топологічного простору наділеного нарізно неперервною груповою операцією з неперервною інверсією. Звідси випливає, що наведені вище достатні умови метризовності топологічних груп не можуть бути поширені на квазітопологічні групи, і тим більше на клас всіх топологічно однорідних просторів. (Нагадаємо, що топологічний простір X є *топологічно однорідним*, якщо для довільних точок $x_1, x_2 \in X$ існує гомеоморфізм $\phi : X \to X$ з властивістю $\phi(x_1) = x_2$.)

Н.Н. Яковлєв у роботі [25] побудував при гіпотезі континуума приклад секвенціального локально зліченного локально компактного простору Y з незліченним псевдохарактером. Пізніше Нікош в роботі [67] зауважив, що побудова Яковлєва працює при певному слабшому припущенні, а саме $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Модифікація простору Яковлєва в дусі побудови простору Архангельського-Франкліна дозволяє отримати секвенціальний топологічно однорідний нульвимірний k_ω-простір Z зі зліченним sb-характером і незліченним псевдохарактером, звідки випливає, що Z не є субметризовним. Підсумовуючи вищесказане, отримуємо

Theorem 1.22.

1. *Існує топологічно однорідний зліченний регулярний k_ω-простір X_1 зі зліченними sb-характером і секвенціальним порядком, характер якого рівний $\mathfrak{d}$;*

2. *При континуум гіпотезі (більш точно, при $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$) існує секвенціальний топологічно однорідний нульвимірний k_ω-простір X_2 зі зліченним cs-характером і незліченним псевдохарактером.*

1.2. Базові властивості cs^*-, cs-, та sb-сіток.

Тут ми досліджуємо загальні властивості sb-, cs- і cs^*-характеру. Ми розглядатимемо лише T_1-простори.

Спочатку розглянемо співвідношення між вищевведеними характерами. Нагадаємо, що топологічний простір X має *властивість Фреше-Урисона*, якщо для довільної точки дотику $a \in X$ підмножини $A \subset X$ існує послідовність $(a_n) \subset A$ збіжна до a.

Твердження 1.1. *Нехай X є топологічним простором. Тоді*

1. $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \le \mathrm{cs}_\chi(X) \le \mathrm{sb}_\chi(X) \le \chi(X)$;

2. *якщо X має властивість Фреше-Урисона, то $\chi(X) = \mathrm{sb}_\chi(X)$;*

3. *наступні умови еквівалентні: a) $\mathrm{cs}^*_\chi(X) < \aleph_0$; b) $\mathrm{cs}_\chi(X) < \aleph_0$; c) $\mathrm{sb}_\chi(X) < \aleph_0$; d) $\mathrm{cs}^*_\chi(X) = 1$; e) $\mathrm{cs}_\chi(X) = 1$; f) $\mathrm{sb}_\chi(X) = 1$; g) кожна збіжна послідовність в X є тривіальною;*

4. $\mathrm{sb}_\chi(X) \le 2^{\mathrm{cs}^*_\chi(X)}$;

5. $\mathrm{cs}_\chi(X) \le \mathrm{cs}^*_\chi(X) \cdot \sup\{\big|[\kappa]^{\le\omega}\big| : \kappa < \mathrm{cs}^*_\chi(X)\} \le \big(\mathrm{cs}^*_\chi(X)\big)^{\aleph_0}$, *де* $[\kappa]^{\le\omega} = \{A \subset \kappa : |A| \le \aleph_0\}$.

Доведення. Перші три пункти безпосередньо випливають з відповідних означень. Щоб довести четвертий пункт, зауважимо, що для довільної cs*-сітки $\mathcal{N}$ в точці x топологічного простору X, сім'я $\mathcal{N}' = \{\cup\mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{N}\}$ є sb-сіткою в x.

Доведення п'ятого пункту менш тривіальне. Зафіксуємо довільну cs*-сітку $\mathcal{N}$ в точці $x \in X$ потужності $|\mathcal{N}| \le \mathrm{cs}^*_\chi(X)$. Позначимо через $\lambda = \mathrm{cof}(|\mathcal{N}|)$ конфінальність кардинала $|\mathcal{N}|$, і запишемо $\mathcal{N} = \bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{N}_\alpha$, де $\mathcal{N}_\alpha \subset \mathcal{N}_\beta$ і $|\mathcal{N}_\alpha| < |\mathcal{N}|$ для довільних ординалів $\alpha \le \beta < \lambda$. Розглянемо сім'ю $\mathcal{M} = \{\cup\mathcal{C} : \mathcal{C} \in [\mathcal{N}_\alpha]^{\le\omega},\ \alpha < \lambda\}$ і зауважимо, що $|\mathcal{M}| \le \lambda \cdot \sup\{|[\kappa]^{\le\omega}| : \kappa < |\mathcal{N}|\}$. Залишилось перевірити, що $\mathcal{M}$ є cs-сіткою в x.

Зафіксуємо окіл $U \subset X$ точки x і послідовність $S \subset X$ збіжну до x. Для кожного $\alpha < \lambda$ виберемо зліченну підмножину $\mathcal{C}_\alpha \subset \mathcal{N}_\alpha$ для якої $\cup\mathcal{C}_\alpha \subset U$ і $S \cap (\cup\mathcal{C}_\alpha) = S \cap (\cup\{N \in \mathcal{N}_\alpha : N \subset U\})$. Тоді $\cup\mathcal{C}_\alpha \in \mathcal{M}$. Нехай $S_\alpha = S \cap (\cup\mathcal{C}_\alpha)$. Зауважимо, що $S_\alpha \subset S_\beta$ для всіх $\alpha \le \beta < \lambda$. Щоб завершити доведення залишилось показати, що $S \setminus S_\alpha$ є скінченною для деякого $\alpha < \lambda$. Тоді елемент $\cup\mathcal{C}_\alpha \subset U$ множини $\mathcal{M}$ міститиме майже всі члени послідовності S.

Розглянемо окремо випадки, коли λ є зліченним і незліченним. Якщо λ є незліченним, тоді його конфінальність незліченна теж, а отже трансфінітна послідовність $(S_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ рано чи пізно стабілізується, тобто існує ординал $\alpha < \lambda$ для якого $S_\beta = S_\alpha$ для всіх $\beta \ge \alpha$. Покажемо, що множина $S \setminus S_\alpha$ є скінченною. Справді, інакше $S \setminus S_\alpha$ була б послідовністю збіжною до x, і тоді існував би елемент $N \in \mathcal{N}$ з властивостями $N \subset U$ і $|N \cap (S \setminus S_\alpha)| = \infty$. Тоді для деякого ординала $\beta \ge \alpha$ множина N належала б $\mathcal{N}_\beta$, і як наслідок $S \cap N \subset S_\beta = S_\alpha$, що суперечить вибору N.

Якщо λ є зліченний і $S \setminus S_\alpha$ є нескінченною для кожного $\alpha < \lambda$, тоді існує нескінченний псевдоперетин $T \subset S$ спадної послідовності $\{S \setminus S_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$. Зауважимо, що $T \cap S_\alpha$ є скінченною для всіх $\alpha < \lambda$. Оскільки послідовність T збігається до x, існує елемент $N \in \mathcal{N}$, для якого $N \subset U$ і $N \cap T$ є скінченним.

Знайдемо $\alpha < \lambda$ з властивістю $N \in \mathcal{N}_\alpha$ і зауважимо, що $N \cap S \subset S_\alpha$. Тоді $N \cap T \subset N \cap T \cap S_\alpha \subset T \cap S_\alpha$ є скінченною, що суперечить вибору N. $\square$

Простір Аренса S_2 і віяло Фреше-Урисона S_ω є прикладами просторів, що розрізняють вищевведені характери. Нагадаємо, що *простором Аренса* S_2 називається множина $\{(0,0),(\frac{1}{n},0),(\frac{1}{n},\frac{1}{nm}) : n,m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ з найсильнішою серед топологій, що індукують природню топологію (топологію збіжної послідовності) на $C_0 = \{(0,0),(\frac{1}{n},0) : n \in \mathbb{N}\}$ і $C_n = \{(\frac{1}{n},0),(\frac{1}{n},\frac{1}{nm}) : m \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Фактор-простір $S_\omega = S_2/C_0$, що отримується з простору Аренса S_2 при ототожненні точок послідовності C_0 називається *віялом Фреше-Урисона*, див. [61]. Віяло Фреше-Урисона S_ω є найпростішим прикладом неметризовного простору з властивістю Фреше-Урисона, а S_2 є найпростішим прикладом секвенціального простору без властивості Фреше-Урисона.

Зауважимо, що $\aleph_0 = \mathrm{cs}^*_\chi(S_2) = \mathrm{cs}_\chi(S_2) = \mathrm{sb}_\chi(S_2) < \chi(S_2) = \mathfrak{d}$ і $\aleph_0 = \mathrm{cs}^*_\chi(S_\omega) = \mathrm{cs}_\chi(S_\omega) < \mathrm{sb}_\chi(S_\omega) = \chi(S_\omega) = \mathfrak{d}$. Тут $\mathfrak{d}$ є добре відомим в теорії множин малим незліченним кардиналом рівним конфінальності природнього часткового порядку $\le$ на множині $\mathbb{N}^\omega$: $(x_n) \le (y_n)$ тоді і лише тоді, коли $x_n \le y_n$ для всіх n, див. [91] і [47]. Тепер ми можемо навести означення кардинала $\mathfrak{d}$, а також кардиналів $\mathfrak{b}$ і $\mathfrak{p}$, що використовуватимуться в цьому розділі.

- $\mathfrak{d} = \mathrm{cof}(\omega^\omega, \le)$. Іншими словами, $\mathfrak{d}$ рівний найменшій потужності таких підмножин $D \subset \omega^\omega$, що для кожного $x \in \omega^\omega$ існує $d \in D$ з властивістю $x \le d$.

- $\mathfrak{b}$ рівний, за означенням, найменшій потужності підпростору частково впорядкованого простору $(\mathbb{N}^\omega, \le)$ з незліченною конфінальністю.

- $\mathfrak{p}$ є найменшою потужністю $|\mathcal{F}|$ сім'ї нескінченних підмножин ω, яка є замкненою відносно скінченних перетинів, але не має нескінченного псевдоперетину (тобто не існує нескінченної підмножини $I \subset \omega$ такої, що доповнення $I \setminus F$ є скінченним для кожного $F \in \mathcal{F}$.

Відомо, що $\aleph_1 \le \mathfrak{p} \le \mathfrak{b} \le \mathfrak{d} \le \mathfrak{c}$, де через $\mathfrak{c}$ ми позначаємо потужність континууму. З Аксіоми Мартіна (надалі MA) випливає, що $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, див. [63]. З іншого боку, для довільних незліченних регулярних кардиналів $\lambda \le \kappa$ існує модель ZFC, в якій $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \lambda$ і $\mathfrak{c} = \kappa$, див. [47, 5.1].

На відміну від кардинальних інваріантів cs_χ, sb_χ і χ, які відрізняються на простих прикладах, різниця між кардинальними інваріантами cs_χ і cs^*_χ є більш тонкою: в певних моделях ZFC вони збігаються!

Твердження 1.2. *Нехай X є топологічним простором. Тоді $\mathrm{cs}^*_\chi(X) = \mathrm{cs}_\chi(X)$ при виконанні однієї з наступних умов:*

1. $\mathrm{cs}^*_\chi(X) < \mathfrak{p}$*;*

2. $\kappa^{\aleph_0} \le \mathrm{cs}^*_\chi(X)$ *для довільного кардинала* $\kappa < \mathrm{cs}^*_\chi(X)$*;*

3. $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ *і* $\lambda^\omega \le \kappa$ *для довільних кардиналів* $\lambda < \kappa \ge \mathfrak{c}$*;*

4. $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ *(ця рівність виконується, зокрема, при MA) і* X *є зліченним;*

5. *виконується узагальнена континуум-гіпотеза (надалі GCH).*

Доведення. Розглянемо топологічний простір X і зафіксуємо точку $x \in X$.

(1) Припустимо, що $\mathrm{cs}^*_\chi(X) < \mathfrak{p}$ і зафіксуємо cs^*-сітку $\mathcal{N}$ в точці x потужності $|\mathcal{N}| < \mathfrak{p}$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що сім'я $\mathcal{N}$ є замкненою відносно скінченних об'єднань. Покажемо, що $\mathcal{N}$ є cs-сіткою в x. Припускаючи протилежне, ми знаходимо окіл $U \subset X$ точки x і послідовність $S \subset X$ збіжну до x, для якої $S \setminus N$ є нескінченною для кожного елемента $N \in \mathcal{N}$, який міститься в U. Оскільки $\mathcal{N}$ є замкненою відносно скінченних об'єднань, сім'я $\mathcal{F} = \{S \setminus N : N \in \mathcal{N},\ N \subset U\}$ є замкненою відносно скінченних перетинів. Оскільки $|\mathcal{F}| \le |\mathcal{N}| < \mathfrak{p}$, сім'я $\mathcal{F}$ має нескінченний псевдоперетин $T \subset S$. Як наслідок $T \cap N$ є скінченною для довільного $N \in \mathcal{N}$, що міститься в U. Але це суперечить тому, що T збігається до x і $\mathcal{N}$ є cs^*-сіткою в точці x.

Пункти (2) і (3) випливають з Тверджень 1.1(5) і 1.2(1). Пункт (4) випливає з (1,2) і рівності $\chi(X) \le \mathfrak{c}$, яка справедлива для кожного зліченного топологічного простору X.

Нарешті, щоб отримати (5) з (3), достатньо використати відомий факт, що при GCH співвідношення $\lambda^{\aleph_0} \le \kappa$ виконується для довільних нескінченних кардиналів $\lambda < \kappa$, див. [53, 9.3.8]. $\square$

На відміну від звичайного характеру, cs*-, cs-, і sb-характери гарно поводяться по відношенню до багатьох зліченних топологічних операцій. Прикладами таких операцій є: тихонівський добуток, ящиковий добуток, взяття секвенціально гомеоморфної копії, взяття образу при секвенціально відкритому відображенні, і формування індуктивних топологій.

Стандартно, під *ящиковим добутком* $\square_{i\in\mathcal{I}} X_i$ топологічних просторів X_i, $i \in \mathcal{I}$, ми розуміємо декартів добуток $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ з топологією породженою базою, що складається з добутків $\prod_{i\in\mathcal{I}} U_i$, де кожен U_i є відкритим в X_i. Через $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ ми позначатимемо декартів добуток просторів X_i, наділений тихонівською топологією.

Кажемо, що топологічний простір X наділено *індуктивною топологією* по відношенню до замкненого покриття $\mathcal{C}$ простору X, якщо підмножина $F \subset X$ є замкненою в X тоді і лише тоді, коли $F \cap C$ є замкненою в C для кожного елемента $C \in \mathcal{C}$. Для покриття $\mathcal{C}$ простору X введемо позначення: $\mathrm{ord}(\mathcal{C}) = \sup_{x\in X} \mathrm{ord}(\mathcal{C}, x)$, де $\mathrm{ord}(\mathcal{C}, x) = |\{C \in \mathcal{C} : x \in C\}|$. Клас топологічних просторів X з індуктивною топологією по відношенню до зліченного покриття замкненими метризовними (відп. компактними, компактними метризовними) співпадає з раніше означеним класом $\mathcal{M}_\omega$*-просторів* (відп. k_ω*-просторів*, *субметризовних* k_ω*-просторів*).

Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами називається *секвенціально неперервним*, якщо для довільної збіжної послідовності (x_n) в X послідовність $(f(x_n))$ є збіжною в Y до $f(\lim x_n)$; f називається *секвенціальним гомеоморфізмом*, якщо f є бієкцією, і обидва f і f^{-1} є секвенціально неперервними. Топологічні простори X, Y є *секвенціально гомеоморфними*, якщо існує секвенціальний гомеоморфізм $h : X \to Y$. Зауважимо, що топологічні простори є секвенціально гомеоморфними тоді і лише тоді, коли їхні секвенціальні корефлекції є гомеоморфними. Під *секвенціальною коре-*

флекцією σX топологічного простору X ми розуміємо X з топологією, що складається з усіх секвенціально відкритих підмножин X (підмножина U простору X є *секвенціально відкритою,* якщо її доповнення є секвенціально замкненим в X; еквівалентно, U є секвенціальним бар'єром в кожній точці $x \in U$). Зауважимо, що тотожнє відображення $\mathrm{id} : \sigma X \to X$ є неперервним, а його обернене є секвенціально неперервним, див. [61]. Топологічний простір називається *секвенціальним*, якщо він співпадає з своєю секвенціальною корефлекцією.

Відображення $f : X \to Y$ є *секвенціально відкритим*, якщо для довільної точки $x_0 \in X$ і послідовності $S \subset Y$ збіжної до $f(x_0)$ існує послідовність $T \subset X$ збіжна до x_0 і така, що $f(T) \subset S$. Зауважимо, що бієктивне відображення f є секвенціально відкритим, якщо його обернене f^{-1} є секвенціально неперервним.

Наступне технічне твердження безпосередньо випливає з відповідних означень.

Твердження 1.3. *1. Якщо X є підпростором топологічного простору Y, тоді* $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \le \mathrm{cs}^*_\chi(Y)$, $\mathrm{cs}_\chi(X) \le \mathrm{cs}_\chi(Y)$ *і* $\mathrm{sb}_\chi(X) \le \mathrm{sb}_\chi(Y)$.

2. *Якщо $f : X \to Y$ є сюр'єктивним неперервним секвенціально відкритим відображенням, тоді* $\mathrm{cs}^*_\chi(Y) \le \mathrm{cs}^*_\chi(X)$ *і* $\mathrm{sb}_\chi(Y) \le \mathrm{sb}_\chi(X)$.

3. *Якщо $f : X \to Y$ є сюр'єктивним секвенціально неперервним секвенціально відкритим відображенням між топологічними просторами, тоді* $\min\{\mathrm{cs}^*_\chi(Y), \aleph_1\} \le \min\{\mathrm{cs}^*_\chi(X), \aleph_1\}$, $\min\{\mathrm{cs}_\chi(Y), \aleph_1\} \le \min\{\mathrm{cs}_\chi(X), \aleph_1\}$, *і* $\min\{\mathrm{sb}_\chi(Y), \aleph_1\} \le \min\{\mathrm{sb}_\chi(X), \aleph_1\}$.

4. *Якщо X, Y є секвенціально гомеоморфними топологічними просторами, тоді* $\min\{\mathrm{cs}^*_\chi(X), \aleph_1\} = \min\{\mathrm{cs}_\chi(X), \aleph_1\} = \min\{\mathrm{cs}_\chi(Y), \aleph_1\} = \min\{\mathrm{cs}^*_\chi(Y), \aleph_1\}$, *і* $\min\{\mathrm{sb}_\chi(Y), \aleph_1\} = \min\{\mathrm{sb}_\chi(X), \aleph_1\}$.

5. $\min\{\mathrm{sb}_\chi(X), \aleph_1\} = \min\{\mathrm{sb}_\chi(\sigma X), \aleph_1\} \le \mathrm{sb}_\chi(\sigma X) \ge \mathrm{sb}_\chi(X)$ *і* $\mathrm{cs}_\chi(X) \le \mathrm{cs}_\chi(\sigma X) \ge \min\{\mathrm{cs}_\chi(\sigma X), \aleph_1\} =$

$= \min\{\mathrm{cs}_\chi(X), \aleph_1\} = \min\{\mathrm{cs}^*_\chi(X), \aleph_1\} = \min\{\mathrm{cs}^*_\chi(\sigma X), \aleph_1\} \le \mathrm{cs}^*_\chi(\sigma X) \ge \mathrm{cs}^*_\chi(X)$ *для довільного топологічного простору* X.

6. *Якщо* $X = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ *є тихонівським добутком топологічних просторів* X_i, $i \in \mathcal{I}$, *тоді* $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \le \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{cs}^*_\chi(X_i)$, $\mathrm{cs}_\chi(X) \le \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{cs}_\chi(X_i)$ *і* $\mathrm{sb}_\chi(X) \le \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{sb}_\chi(X_i)$.

7. *Якщо* $X = \square_{i\in\mathcal{I}} X_i$ *є ящиковим добутком топологічних просторів* X_i, $i \in \mathcal{I}$, *тоді* $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \le \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{cs}^*_\chi(X_i)$ *і* $\mathrm{cs}_\chi(X) \le \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{cs}_\chi(X_i)$.

8. *Якщо топологічний простір* X *наділено індуктивною топологією по відношенню до покриття* $\mathcal{C}$ *простору* X, *тоді* $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \le \mathrm{ord}(\mathcal{C}) \cdot \sup_{C\in\mathcal{C}} \mathrm{cs}^*_\chi(C)$.

9. *Якщо топологічний простір* X *наділено індуктивною топологією по відношенню до точково-зліченного покриття* $\mathcal{C}$, *тоді* $\mathrm{cs}_\chi(X) \le \sup_{C\in\mathcal{C}} \mathrm{cs}_\chi(C)$.

10. *Якщо топологічний простір* X *наділено індуктивною топологією по відношенню до точково-скінченного покриття* $\mathcal{C}$, *тоді* $\mathrm{sb}_\chi(X) \le \sup_{C\in\mathcal{C}} \mathrm{sb}_\chi(C)$.

Доведення. 2. Наведемо доведення у випадку cs*-характеру. Для sb-характеру доведення аналогічне.

Нехай $y \in Y$ і $\mathcal{N}$ є cs*-сіткою в деякій точці $x \in f^{-1}(y)$. Покажемо, що $\mathcal{M} = \{f(N) : N \in \mathcal{N}\}$ є cs*-сіткою в точці $y \in Y$. Для цього зафіксуємо довільну збіжну до y послідовність $S \subset Y$ і окіл W точки y. За неперервністю і секвенціальною відкритістю відображення f існує послідовність $T \subset X$ збіжна до x і елемент $N \in \mathcal{N}$, для яких $N \subset f^{-1}(W)$, $|N \cap T| = \infty$ і $f(T) \subset S$. Тоді $f(N) \in \mathcal{M}$, $f(N) \subset W$ і $|f(N) \cap S| = \infty$. З огляду на довільність вибору послідовності S, множина $\mathcal{M}$ є cs*-сіткою в точці y.

3. Спочатку доведемо, що $\min\{\mathrm{cs}^*_\chi(X), \aleph_1\} = \min\{\mathrm{cs}_\chi(X), \aleph_1\}$ для довільного топологічного простору X. Для цього достатньо довести, що зі зліченності cs*-характеру випливає зліченність cs-характеру. Нехай $\mathcal{N}$ є зліченною

cs*-сіткою в точці $x \in X$, і $\mathcal{N}' = \{\bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A}$ є скінченною підмножиною $\mathcal{N}\}$. Покажемо, що $\mathcal{N}'$ є cs-сіткою в точці x. Справді, розглянемо довільну послідовність S збіжну до x і окіл U точки x. Запишемо множину $\{N \in \mathcal{N} : N \subset U\}$ у вигляді $\{N_i : i \in \omega\}$ і позначимо через $M_i \in \mathcal{N}'$ об'єднання $\bigcup_{j \leq i} N_i$. Якщо доповнення $S \setminus M_i$ є скінченним для деякого i, то все доведено. В протилежному випадку для кожного $i \in \omega$ знайдеться послідовність $S_i \subset (S \setminus M_i)$. Нехай $S = \bigcup_{i \in \omega} F_i$, де $F_i \subset F_{i+1}$ і кожна множина F_i є скінченною. Зафіксуємо $x_i \in S_i \setminus F_i$ і зауважимо, що $T = \{x_i : i \in \omega\}$ є підпослідовністю послідовності S, причому $|S \cap N_i| < \infty$ для кожного i, суперечність.

Перейдемо тепер до доведення трьох нерівностей наведених у цьому пункті. Зауважимо, що перша з них випливає з другої і щойно доведеної рівності $\min\{\mathrm{cs}^*_\chi(X), \aleph_1\} = \min\{\mathrm{cs}_\chi(X), \aleph_1\}$. Доведемо нерівність
$\min\{\mathrm{cs}_\chi(Y), \aleph_1\} \leq \min\{\mathrm{cs}_\chi(X), \aleph_1\}$. Нехай y, x, S, W і $\mathcal{N}$ є такими, як в попередньому пункті, причому сітка $\mathcal{N} = \{N_i : i \in \omega\}$ є зліченною. Покажемо, що $\mathcal{M} = \{f(\bigcap \mathcal{A}) : A$ є скінченною підмножиною $\mathcal{N}\}$ є cs*-сіткою в точці y. З властивостей відображення f випливає, що існує послідовність $T \subset X$ для якої $f(T) \subset S$, і $f^{-1}(W)$ є секвенціально відкритою підмножиною простору X. Запишемо множину $\{N \in \mathcal{N} : |T \setminus N| < \infty\}$ у вигляді $\{N_i : i \in \omega\}$ і позначимо перетин $\bigcap_{j \leq i} N_j$ через L_i. Залишилось довести, що $L_i \subset f^{-1}(W)$ для деякого $i \in \omega$. Справді, у протилежному випадку знайдеться $x_i \in L_i \setminus f^{-1}(W)$. За означенням cs-сітки, для кожного околу U точки x знайдеться $i \in \omega$ з властивістю $N_i \subset U$, звідки випливає, що послідовність $\{x_i\}_{i \in \omega}$ є збіжною до x. З іншого боку, $x_i \notin f^{-1}(W)$для всіх i, що супкречить секвенціальній відкритості множини $f^{-1}(W) \ni x$. Таким чином Y має зліченний cs*-характер, а отже і cs-характер.

Відповідне доведення для sb-характера є аналогічним.

4,5. Ці пункти безпосередньо випливають з пункту 3, а також неперервності і секвенціальної відкритості тотожнього відображення $\mathrm{id}_X : \sigma X \to X$.

6,7. Доведення цих пунктів аналогічне до доведенння цієї ж нерівності для "звичайного" характеру, тільки у випадку ящикового добутку слід додатково використати наступний факт: якщо послідовність $(x^n)_{n\in\omega}$ елементів ящикового добутку $\square_{i\in I}X_i$ T_1-просторів збігається до $(x_i)_{i\in I}$, де $x^n = (x_i^n)_{i\in\mathcal{I}}$, тоді існує скінченна підмножина $J \subset I$ і $N \in \omega$, для яких $x_i^n = x_i$ для всіх $i \notin J$ і $n \geq N$.

8,9,10. Нехай $x \in X$ і $\mathcal{N}_C$ є cs*-сіткою (відп. cs-сіткою, sb-сіткою) в точці x для кожного $\mathcal{C} \ni C \ni x$. Тоді якщо покриття простору X є довільним (відп. точково-зліченним, точково-скінченним), то

$$\mathcal{N} = \{ \bigcup_{C\in\mathcal{C}, x\in C} N_C : N_C \in \mathcal{N}_C \cup \{\emptyset\}, |C : N_C \neq \emptyset| < \infty\}$$

є cs*-сіткою (відп. cs-сіткою, sb-сіткою) в точці x простору X. $\square$

Далі ми зосередимося на умовах, при яких простір зі зліченним cs*-характером задовільняє першу аксіому зліченності чи має зліченний sb-характер. Слідуючи [4] ми кажемо, що топологічний простір X є *c-секвенціальним*, якщо для кожної замкненої підмножини $Y \subset X$ і кожної неізольованої точки $y \in Y$ існує послідовність $(y_n) \subset Y \setminus \{y\}$ збіжна до y. Кожен секвенціальний простір є, очевидно, c-секвенціальним. Точка x топологічного простору X називається *регулярною* G_δ, якщо $\{x\} = \cap\mathcal{B}$ для деякої зліченної сім'ї $\mathcal{B}$ замкнених околів точки x в X, див. [61].

О. В. Архангельським в роботах [3] і [6] введено класи α_i-просторів, де $i = 1, \ldots, 6$. Нагадаємо означення α_1- і α_4-просторів, а також введемо ширший клас α_7-просторів. Топологічний простір X називається

- α_1-*простором*, якщо для довільних послідовностей $S_n \subset X$, $n \in \omega$, збіжних до деякої точки $x \in X$, існує така збіжна до x послідовність $S \subset X$, що $S_n \setminus S$ є скінченною для всіх n;

- α_4-*простором*, якщо для довільних послідовностей $S_n \subset X$, $n \in \omega$, збіжних до деякої точки $x \in X$, існує така збіжна до x послідовність $S \subset X$, що $S_n \cap S \neq \emptyset$ для безмежної кількості індексів n;

- α_7*-простором*, якщо для довільних послідовностей $S_n \subset X$, $n \in \omega$, збіжних до деякої точки $x \in X$, існує така збіжна до деякої точки $y \in X$ послідовність $S \subset X$, що $S_n \cap S \neq \emptyset$ для безмежної кількості індексів n;

Кожен α_1-простір є α_4, і кожен α_4-простір є α_7. Досить часто α_7-простори є α_4, див. Лему 1.5. Також зауважимо, що кожний секвенціально компактний простір є α_7. Можна довести, що топологічний простір X є α_7-простором тоді і лише тоді, коли він не містить замкненої копії віяла Фреше-Урисона S_ω у своїй секвенціальній корефлекції σX. Якщо X є α_4-простором, тоді σX не містить топологічної копії S_ω.

Спочатку ми охарактеризуємо простори зі зліченним sb-характером (перші три пункти цієї характеризації доведені Ш. Ліном в роботі [61, 3.13] в термінах (універсально) csf-зліченних просторів).

Твердження 1.4. *Для гаудорфового простору X наступні умови еквівалентні:*

1. *X має зліченний* sb*-характер;*
2. *X є α_1-простором зі зліченним* cs**-характером;*
3. *X є α_4-простором зі зліченним* cs**-характером;*
4. $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \le \aleph_0$ *і* $\mathrm{sb}_\chi(X) < \mathfrak{p}$.

   Більш того, якщо X є c-секвенціальним і кожна точка простору X є регулярною G_δ, тоді умови (1)–(4) є еквівалентними до:

5. $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \le \aleph_0$ *і* $\mathrm{sb}_\chi(X) < \mathfrak{d}$.

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) and (2) $\Rightarrow$ (3) є очевидними.

Доведемо імплікацію (3) $\Rightarrow$ (1). Зафіксуємо точку $x \in X$ і зліченну cs-сітку $\mathcal{N}$ в точці x (її існування випливає з Твердження 1.3(4)). Позначимо через $\mathcal{L}$ множину $\{\cup\mathcal{A} : \mathcal{A}$ є скінченною підмножиною $\mathcal{N}\}$ і покажемо, що $\mathcal{L}$ є sb-сіткою в точці x. Припустивши протилежне, знайдемо відкриту множину $U \supset x$, що не містить жоден секвенціальний бар'єр $L \in \mathcal{L}$ в точці x.

Запишемо множину $\{N \in \mathcal{N} : N \subset U\}$ у вигляді $\{N_i : i \in \omega\}$, і покладемо $L_i = \bigcup_{j \le i} N_j$. Оскільки $\mathcal{N}$ є cs-сіткою в точці x і жодна з множин L_i не є секвенціальним бар'єром в точці x, то по індукції по $k \in \omega$ ми можемо побудувати зростаючу числову послідовність $(i_k)_{k \in \omega}$ і послідовність $(S_k)_{k \in \omega}$ послідовностей збіжних до x, для яких $S_k \subset L_{i_{k+1}} \setminus L_{i_k}$ для всіх $k \in \omega$. З властивості α_4 простору X випливає існування послідовності S збіжної до x, для якої $S \cap S_k \neq \emptyset$ для нескінченної кількості $k \in \omega$. Звідси випливає, що $S \setminus N_i$ є нескінченним для кожного $i \in \omega$, що суперечить означенню cs-сітки.

Щоб довести решту еквівалентностей ми застосовуватимемо наступну лему.

Лема 1.5. *Якщо виконується одна з наступних умов, то гаусдорфовий топологічний простір X є α_4-простором.*

1. *X є α_7-простором з властивістю Фреше-Урисона;*
2. *X є зліченно компактним простором з властивістю Фреше-Урисона;*
3. *$\mathrm{sb}_\chi(X) < \mathfrak{p}$;*
4. *$\mathrm{sb}_\chi(X) < \mathfrak{d}$, кожна точка простору X є регулярною G_δ, і X є c-секвенціальним.*

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $x \in X$ і зліченну сім'ю $\{S_n\}_{n \in \omega}$ послідовностей збіжних до x в X. Нам потрібно знайти таку послідовність $S \subset X \setminus \{x\}$ збіжну до x, яка б перетинала нескінченну кількість послідовностей S_n. Використовуючи зліченність множини $\bigcup_{n \in \omega} S_n$, знайдемо спадну послідовність $(U_n)_{n \in \omega}$ замкнених околів точки x в X, для якої $\big(\bigcap_{n \in \omega} U_n\big) \cap \big(\bigcup_{n \in \omega} S_n\big) = \{x\}$. Замінюючи кожну S_n перетином $S_n \cap U_n$, якщо необхідно, можемо вважати, що $S_n \subset U_n$.

(1) Припустимо, що X є α_7-простором з властивістю Фреше-Урисона. Нехай $A = \{a \in X : a$ є границею збіжної послідовності $S \subset X$, яка перетинає нескінченну кількість послідовностей $S_n\}$. З нашого припущення на (S_n) і (U_n) випливає, що $A \subset \bigcap_{n \in \omega} U_n$.

Залишилось розглянути випадок $x \notin A$. В цьому випадку x є граничною точкою A (інакше X не був би α_7-простором). Оскільки X має властивість Фреше-Урисона, існує послідовність $(a_n) \subset A$ збіжна до x. За означенням A, для кожного $m \in \omega$ існує така послідовність $T_m \subset X \setminus \{x\}$ збіжна до a_m, яка перетинає нескінченну кількість послідовностей S_n. Без втрати загальності можна вважати, що $T_m \subset \bigcup_{i>m} S_i$. Легко бачити, що x є граничною точкою множини $\bigcup_{n\in\omega} T_n$. Оскільки X має властивість Фреше-Урисона, то деяка послідовність $T \subset \bigcup_{n\in\omega} T_n$ збігається до x.

Залишилось показати, що множина T перетинає безмежну кількість послідовностей S_n. В протилежному випадку існує $m \in \omega$ для якого $T \subset \bigcup_{i\leq m} S_i$. Тоді $T \subset \bigcup_{i\leq n} T_i$, що неможливо в силу того, що $\bigcup_{i\leq n} T_i$ є компактною множиною, яка не містить x.

(2) Якщо X має властивість Фреше-Урисона і є зліченно компактним, тоді він є α_7-простором (будучи секвенціально компактним), що дозволяє застосувати попередній пункт.

(3) Припустимо, що $\mathrm{sb}_\chi(X) < \mathfrak{p}$, і нехай $\mathcal{N}$ є деякою sb-сіткою в x потужності $|\mathcal{N}| < \mathfrak{p}$. Без втрати загальності можна вважати, що сім'я $\mathcal{N}$ є замкненою відносно скінченних перетинів. Нехай $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ і $F_{N,n} = N \cap (\bigcup_{i\geq n} S_i)$ для $N \in \mathcal{N}$ і $n \in \omega$. Неважко помітити, що сім'я $\mathcal{F} = \{F_{N,n} : N \in \mathcal{N},\ n \in \omega\}$ складається з нескінченних підмножин S, має потужність $|\mathcal{F}| < \mathfrak{p}$, і є замкненою відносно скінченних перетинів. З означення малого кардинала $\mathfrak{p}$ випливає, що сім'я $\mathcal{F}$ має нескінченний псевдоперетин $T \subset S$. Тоді T є послідовністю збіжною до x, яка перетинає безмежну кількість S_n. Звідси випливає, що X є α_4-простором.

(4) Припустимо, що X є c-секвенціальним, кожна точка X є регулярною G_δ, і $\mathrm{sb}_\chi(X) < \mathfrak{d}$. В цьому випадку існує послідовність (U_n) з властивістю $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \{x\}$. Зафіксуємо sb-сітку $\mathcal{N}$ в x потужності $|\mathcal{N}| < \mathfrak{d}$. Для кожного $n \in \omega$ запишемо S_n у вигляді $\{x_{n,i} : i \in \mathbb{N}\}$. Для кожного секвенціального бар'єра $N \in \mathcal{N}$ знайдемо функцію $f_N : \omega \to \mathbb{N}$ таку, що $x_{n,i} \in N$ для кожного $n \in \omega$ і $i \geq f_N(n)$. Сім'я функцій $\{f_N : N \in \mathcal{N}\}$ має потужність $< \mathfrak{d}$, отже не є конфінальною в $\mathbb{N}^\omega$. Отже існує функція $f : \omega \to \mathbb{N}$ для якої $f \not\leq f_N$ для

кожного $N \in \mathcal{N}$. Розглянемо послідовність $S = \{x_{n,f(n)} : n \in \omega\}$. Покажемо, що x є граничною точкою S. Справді, розглянемо довільний окіл U точки x і знайдемо секвенціальний бар'єр $N \in \mathcal{N}$ який міститься в U. Оскільки $f \not\leq f_N$, існує $n \in \omega$ з властивістю $f(n) > f_N(n)$. За вибором функції f_N маємо, що $x_{n,f(n)} \in N \subset U$.

Оскільки $S \setminus U_n$ є скінченною для кожного n, $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ є єдиною граничою точкою S, і тому $\{x\} \cup S$ є замкненою підмножиною X. Тепер з c-секвенціальності X випливає існування послідовності $T \subset S$ збіжної до x. Оскільки T перетинає нескінченну кількість послідовностей S_n, простір X є α_4-простором. □ □

Аналогічна характеризація справедлива і для просторів з першою аксіомою зліченності (еквівалентності (1) ⇔ (2) ⇔ (5) можна знайти в [61, 2.8]).

Твердження 1.6. *Для гаусдорфового простору X зі зліченним* cs*-*характером наступні умови еквівалентні:*

1. *X задовільняє першу аксіому зліченності;*
2. *X має властивість Фреше-Урисона і зліченний* sb-*характер;*
3. *X є α_7-простором з властивістю Фреше-Урисона;*
4. *$\chi(X) < \mathfrak{p}$ і X має зліченну тісноту.*

   Крім того, якщо кожна точка простору X є регулярною G_δ, тоді умови (1)–(4) є еквівалентними до:

5. *X є секвенціальним простором, який не містить замкнених копій S_2 або S_ω;*
6. *X є секвенціальним простором з характером $\chi(X) < \mathfrak{d}$.*

Доведення. Припустимо, що простір X має зліченний cs*-характер. Імплікації (1) ⇒ (2, 3, 4, 5) тривіальні. Еквівалентність (1) ⇔ (2) випливає з

Твердження 1.1(2). Щоб довести, що (3) $\Rightarrow$ (2), достатньо застосувати Лему 1.5 і Твердження 1.4(3 $\Rightarrow$ 1).

Щоб довести (4) $\Rightarrow$ (2) достатньо застосувати Твердження 1.4(4 $\Rightarrow$ 1) і зауважити, що якщо $\chi(X) < \mathfrak{p}$ і X має зліченну тісноту, то X має властивість Фреше-Урисона. Це можна показати наступним чином.

Зафіксувавши підмножину $A \subset X$ і точку $a \in \bar{A}$ в її замиканні, використаємо зліченність тісноти X, щоб знайти зліченну підмножину $N \subset A$ яка містить a в своєму замиканні. Зафіксуємо довільну базу $\mathcal{B}$ в точці x потужності $|\mathcal{B}| < \mathfrak{p}$. Додатково будемо вважати, що $\mathcal{B}$ є замкненою відносно скінченних перетинів. За означенням кардинала $\mathfrak{p}$, сім'я $\{B \cap N : B \in \mathcal{B}\}$ має нескінченний псевдоперетин $S \subset N$. Зрозуміло, що $S \subset A$ є послідовністю збіжною до x, а тому X має властивість Фреше-Урисона.

(5) $\Rightarrow$ (2). Припустимо, що X є секвенціальним простором, який не містить замкнених копій S_ω і S_2, і кожна точка $x \in X$ є регулярною G_δ. Оскільки X є секвенціальним і не містить замкненої копії S_2, за [61, Lem. 2.5] X має властивість Фреше-Урисона. За [61, Th. 5.6] простір X є α_4-простором. Нарешті за Твердженням 1.4 простір X має зліченний sb-характер, і маючи властивість Фреше-Урисона, задовільняє першу аксіому зліченності.

Остання імплікація (6) $\Rightarrow$ (2) випливає з (5) $\Rightarrow$ (2) і відомої рівності $\chi(S_\omega) = \chi(S_2) = \mathfrak{d}$. $\square$

1.3. cs*-Характер деяких компактних просторів.

Для компактів з властивістю Фреше-Урисона (відп. діадичних компактів) зліченність cs*-характеру є еквівалентною до зліченності характеру (відп. до метризовності). Нагадаємо, що компактний гаусдорфовий простір X називається *діадичним*, якщо X є неперервним образом канторового простору $\{0,1\}^\kappa$ для деякого кардинала κ. Нагадаємо, що вагою топологічного простору називається найменша потужність бази його топології.

Твердження 1.7.

1. *Зліченно компактний простір з властивістю Фреше-Урисона задовільняє першу аксіому зліченності тоді і лише тоді, коли він має зліченний* cs**-характер.*

2. *Діадичний компакт є метризовним тоді і лише тоді коли він має зліченний* cs**-характер.*

Доведення. Перший пункт цього твердження випливає з Твердження 1.6($3 \Rightarrow 1$) і факту, що кожен зліченно компактний простір з властивістю Фреше-Урисона, будучи секвенціально компактним, є α_7-простором.

Припустимо, що X є діадичним компактом з $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \le \aleph_0$. Якщо X не є метризовним, тоді він містить копію αD одноточкової компактифікації незліченного дискретного простору D, див. [15, 3.12.12(i)]. Тоді $\mathrm{cs}^*_\chi(\alpha D) \le \mathrm{cs}^*_\chi(X) \le \aleph_0$, і за попереднім пунктом простір αD, будучи компактним і маючи властивість Фреше-Урисона, задовільняє першу аксіому зліченності, що призводить до суперечності. □

З огляду на Твердження 1.7(1) можна припустити, що $\mathrm{cs}^*_\chi(X) = \chi(X)$ для довільного компактного простору X з властивістю Фреше-Урисона. Проте це не так: при CH, $\mathrm{cs}_\chi(\alpha D) \ne \chi(\alpha D)$ для одноточкової компатифікації αD дискретного простору D потужності $|D| = \aleph_2$. Дивно, але обчислення cs*- і cs-характерів просторів αD не є тривіальним, і точна відповідь відома лише при GCH. Спочатку зауважимо, що кардинали $\mathrm{cs}^*_\chi(\alpha D)$ і $\mathrm{cs}_\chi(\alpha D)$ мають цікаву інтерпретацію, яка використовуватиметься при їхньому обчисленні.

Твердження 1.8. *Нехай D – нескінченний дискретний простір. Тоді*

1. $\mathrm{cs}^*_\chi(\alpha D) = \min\{w(X) : X$ *є (регулярним нульвимірним) топологічним простором потужності* $|X| = |D|$*, який не містить нетривіальних збіжних послідовностей*$\}$*;*

2. $\mathrm{cs}_\chi(\alpha D) = \min\{w(X) : X$ *є (регулярним нульвимірним) топологічним простором потужності* $|X| = |D|$*, який не містить зліченних недискретних підпросторів*$\}$*.*

Доведення. Розглянемо деякий дискретний простір D.

(1) Покладемо $\kappa = \mathrm{cs}^*_\chi(\alpha D)$ і позначимо через λ_1 (λ_2) найменшу вагу (регулярного нульвимірного) простору X потужності $|X| = |D|$, який не містить нетривіальних збіжних послідовностей. Щоб довести перший пункт Твердження 1.8 достатньо перевірити, що $\lambda_2 \le \kappa \le \lambda_1$. Щоб показати, що $\lambda_2 \le \kappa$, зафіксуємо довільну cs*-сітку $\mathcal{N}$ в єдиній неізольованій точці ∞ простору αD потужності $|\mathcal{N}| \le \kappa$. Алгебра $\mathcal{A}$ підмножин D породжена сім'єю $\{D \setminus N : N \in \mathcal{N}\}$ є базою для деякої нульвимірної топології τ на D з вагою $w(D,\tau) \le \kappa$. Покажемо, що простір D наділений цією топологією не містить нетривіальних збіжних послідовностей. Щоб отримати суперечність, припустимо, що $S \subset D$ є нетривіальною послідовністю збіжною до точки $a \in D\setminus S$. Тоді S збігається до ∞ в αD, і тоді існує елемент $N \in \mathcal{N}$, для якого $N \subset \alpha D \setminus \{a\}$ і перетин $N \cap S$ є нескінченним. Як наслідок, $U = D \setminus N$ є околом точки a в топології τ, для якого $S \setminus U$ є нескінченною, що суперечить тому, що S збігається до a. Тепер розглянемо наступне відношення еквівалентності $\sim$ на D: $x \sim y$, якщо для кожного $U \in \tau$ $(x \in U) \Leftrightarrow (y \in U)$. Оскільки простір (D,τ) не містить нетривіальних збіжних послідовностей, кожен клас еквівалентності $[x]_\sim \subset D$ є скінченним (оскільки він є антидискретним у топології τ). Отже можна знайти підмножину $X \subset D$ потужності $|X| = |D|$, для якої $x \not\sim y$ для довільних двох різних $x, y \in X$. Тоді очевидно τ індукує нульвимірну топологію на X. Залишилось перевірити, що ця топологія є T_1. Зафіксуємо довільні різні $x, y \in X$. Використовуючи $x \not\sim y$, можна знайти відкриту множину $U \in \mathcal{A}$, для якої або $x \in U$ і $y \notin U$, або $x \notin U$ і $y \in U$. Оскільки $D \setminus U \in \mathcal{A}$, в обох випадках ми знайшли відкриту множину $W \in \mathcal{A}$, що містить x але $y \notin W$. Звідси випливає, що X є T_1-простором без нетривіальних збіжних послідовностей, і таким чином $\lambda_2 \le w(X) \le |\mathcal{A}| \le |N| \le \kappa$.

Щоб довести, що $\kappa \le \lambda_1$, зафіксуємо топологію τ на D з вагою $w(D,\tau) \le \lambda_1$, причому таку, щоб простір (D,τ) не містив нетривіальних збіжних послідовностей. Нехай $\mathcal{B}$ є довільною базою топології τ потужності $|\mathcal{B}| \le \lambda_1$, яка замкнена відносно скінченних об'єднань. Покажемо, що сім'я $\mathcal{N} = \{\alpha D \setminus B :$

$B \in \mathcal{B}\}$ є cs*-сіткою для αD в ∞. Зафіксуємо довільний окіл $U \subset \alpha D$ точки ∞ і довільну послідовність $S \subset D$ збіжну до ∞. Запишемо $\{x_1, \dots, x_n\} = \alpha D \backslash U$ і за скінченною індукцією для кожного $i \le n$ знайдемо окіл $B_i \in \mathcal{B}$ точки x_i, для якого $S \setminus \bigcup_{j \le i} B_j$ є нескінченним. Оскільки $\mathcal{B}$ є замкненою відносно скінченних об'єднань, множина $N = \alpha D \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)$ належить сім'ї $\mathcal{N}$ і має наступні властивості: $N \subset U$ і перетин $N \cap S$ є нескінченним, тобто $\mathcal{N}$ є cs*-сіткою в ∞ простору αD. Таким чином $\kappa \le |\mathcal{N}| \le |\mathcal{B}| \le \lambda_1$. Це завершує доведення (1).

Очевидна мождифікація попередніх міркувань дає доведення пункту (2). $\square$

Для кардинала κ покладемо $\log \kappa = \min\{\lambda : \kappa \le 2^\lambda\}$, і позначимо через $\mathrm{cof}([\kappa]^{\le\omega})$ найменшу потужність такої сім'ї $\subset [\kappa]^{\le\omega}$, що кожна зліченна підмножина $S \subset \kappa$ міститься в деякому елементі $C \in \mathcal{C}$. Зауважимо, що $\mathrm{cof}([\kappa]^{\le\omega}) \le \kappa^\omega$, і строга нерівність є можливою: $1 = \mathrm{cof}([\aleph_0]^{\le\omega}) < \aleph_0$, і $\aleph_1 = \mathrm{cof}([\aleph_1]^{\le\omega}) < \aleph_1^{\aleph_0}$ при $\aleph_1 < \mathfrak{c}$. В наступному твердженні зібрана вся відома нам інформація про кардинали $\mathrm{cs}^*_\chi(\alpha D)$ і $\mathrm{cs}_\chi(\alpha D)$.

Твердження 1.9. *Нехай D – незліченний дикретний простір. Тоді*

1. $\aleph_1 \cdot \log|D| \le \mathrm{cs}^*_\chi(\alpha D) \le \mathrm{cs}_\chi(\alpha D) \le \min\{|D|, 2^{\aleph_0} \cdot \mathrm{cof}([\log|D|]^{\le\omega})\}$, *але* $\mathrm{sb}_\chi(\alpha D) = \chi(\alpha D) = |D|$;
2. $\mathrm{cs}^*_\chi(\alpha D) = \mathrm{cs}_\chi(\alpha D) = \aleph_1 \cdot \log|D|$ *при GCH.*

Доведення. Розглянемо довільний незліченний дискретний простір D.

(1) Нерівності $\aleph_1 \cdot \log|D| \le \mathrm{cs}^*_\chi(\alpha D) \le \mathrm{cs}_\chi(\alpha D)$ випливають з Тверджень 1.7(1) і 1.1(2,4), які дають $|D| = \chi(\alpha D) = \mathrm{sb}_\chi(\alpha D) \le 2^{\mathrm{cs}^*_\chi(\alpha D)}$. Нерівності $\mathrm{cs}_\chi(\alpha D) \le \mathfrak{c} \cdot \mathrm{cof}([\log|D|]^{\le\omega})$ випливають з Твердження 1.8(2) і зауваження, що добуток $\{0,1\}^{\log|D|}$ наділений топологією $\aleph_0$-ящикового добутка має вагу $\le \mathfrak{c} \cdot \mathrm{cof}([\log|D|]^{\le\omega})$. Нагадаємо, що під *топологією $\aleph_0$-ящикового добутку* на $\{0,1\}^\kappa$ ми розуміємо топологію породжену базою $\{f \in \{0,1\}^\kappa : f|C = g|C\}$, де $g \in \{0,1\}^\omega$ і C є зліченною підмножиною κ.

Пункт (2) випливає з (1) і рівності $\aleph_1 \cdot \log\kappa = 2^{\aleph_0} \cdot \min\{\kappa, (\log\kappa)^\omega\}$, яка виконується при GCH для довільного нескінченного кардинала κ, див. [53, 9.3.8] □

Деякі базові питання про cs*- і cs-сітки досі відкриті. Наприклад, невідомо, чи існує (з необхідністю при деякому аксіоматичному припущенні) топологічний простір X для якого $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \neq \mathrm{cs}_\chi(X)$? Зокрема, чи $\mathrm{cs}^*_\chi(\alpha\mathfrak{c}) \neq \mathrm{cs}_\chi(\alpha\mathfrak{c})$ в деяких моделях ZFC? А також, чи нерівність $\mathrm{sb}_\chi(X) \leq \aleph_0$ виконується для довільного (розрідженого) компакта X з властивістю $\mathrm{cs}_\chi(X) \leq \aleph_0$?

1.4. Секвенціальні дерева.

Головним інструментом в подальших доведеннях є поняття секвенціального дерева. Під *деревом* ми розуміємо частково впорядковану множину $(T, \leq)$, в якій для кожного $t \in T$ підмножина $\downarrow t = \{\tau \in T : \sigma \leq t\}$ є цілком впорядкованою відношенням $\leq$. Для елемента $t \in T$ покладемо $\uparrow t = \{\tau \in T : \tau \geq t\}$ і позначимо через $\mathrm{succ}(t) = \min(\uparrow t \setminus \{t\})$ множину наступників елемента t в T. Максимальні щодо включення лінійно впорядковані підмножини дерева T називаються *гілками* T. Через $\max T$ надалі позначатимемо максимальні елементи дерева T.

Означення 1.10. Секвенціальним деревом *в топологічному просторі* X *називається дерево* $(T, \leq)$ *з наступними властивостями:*

- $T \subset X$;
- T *не має нескінченних гілок;*
- *для довільного* $t \notin \max T$ *множина* $\min(\uparrow t \setminus \{t\})$ *наступників елемента* t *є зліченною і збігається до* t.

Кажучи, що підмножина S топологічного простору X збігається до точки $t \in X$ ми маємо на увазі, що для довільного околу $U \subset X$ точки t доповнення $S \setminus U$ є скінченним.

Наступна лема є добре відомою, і її можна легко довести по трансфінітній індукції (за ординалом $s(a,A) = \min\{\alpha : a \in A^{(\alpha)}\}$, де A є підмножиною секвенціального простору і $a \in \bar{A}$)

Лема 1.11. *Точка $a \in X$ секвенціального топологічного простору X належить до замикання підмножини $A \subset X$ тоді і лише тоді, коли існує секвенціальне дерево $T \subset X$, для якого $\min T = \{a\}$ і $\max T \subset A$.*

Для підмножин A, B групи G позначимо через $A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\} \subset G$ обернену підмножину до A в G, і через $AB = \{xy : x \in A,\ y \in B\} \subset G$ добуток підмножин A, B в G. Наступні дві леми будуть використовуватися в доведенні Теореми 1.16.

Лема 1.12. *Нехай $F \subset G$ є секвенціальним підпростором топологічної групи G. Якщо підпростір $F^{-1}F \subset G$ має зліченний* sb*-характер в одиниці e групи G, тоді F задовільняє першу аксіому зліченності.*

Доведення. Зауважимо, що достатньо розглянути випадок $e \in F$ і довести, що F має зліченний характер в e.

Нехай $\{S_n : n \in \omega\}$ – спадна sb-сітка в точці e простору $F^{-1}F$. Спочатку покажемо, що для кожного $n \in \omega$ існує $m > n$ таке, що $S_m^2 \cap (F^{-1}F) \subset S_n$. В протилежному випадку для кожного $m \in \omega$ існували б $x_m, y_m \in S_m$ з властивістю $x_m y_m \in (F^{-1}F) \backslash S_n$. Беручи до уваги, що $\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} y_m = e$, ми отримаємо $\lim_{m\to\infty} x_m y_m = e$. Оскільки S_n є секвенціальним бар'єром в e, існує номер m, для якого $x_m y_m \in S_n$, що суперечить вибору точок x_m, y_m.

Тепер покажемо, що для всіх $n \in \omega$ множина $S_n \cap F$ є околом точки e в F. Припустимо навпаки, тобто $e \in \mathrm{cl}_F(F \setminus S_{n_0})$ для деякого $n_0 \in \omega$.

За Лемою 1.11 існує секвенціальне дерево $T \subset F$, для якого $\min T = \{e\}$ і $\max T \subset F \backslash S_{n_0}$. Щоб отримати суперечність ми побудуємо нескінченну гілку в T. Покладемо $x_0 = e$ і позначимо через m_0 найменше число з властивістю $S_{m_0}^2 \cap F^{-1}F \subset S_{n_0}$.

По індукції, для кожного $i \geq 1$ знайдемо число $m_i > m_{i-1}$, для якого $S_{m_i}^2 \cap F^{-1}F \subset S_{m_{i-1}}$, і точку $x_i \in \mathrm{succ}(x_{i-1}) \cap (x_{i-1} S_{m_i})$. Щоб показати, що вибір завжди можливий, достатньо перевірити, що $x_{i-1} \notin \max T$. З індуктивної побудови випливає, що $x_{i-1} \in F \cap (S_{m_0} \cdots S_{m_{i-1}}) \subset F \cap S_{m_0}^2 \subset S_{n_0}$, і таким чином $x_{i-1} \notin \max T$, бо $\max T \subset F \setminus S_{n_0}$.

Отже ми побудували нескінченну гілку $\{x_i : i \in \omega\}$ секвенціального дерева T, що призводить до суперечності. □

Лема 1.13. *Секвенціальний α_7-підпростір F топологічної групи G має зліченний* sb*-характер при умові, що підпростір $F^{-1}F \subset G$ має зліченний* cs*-характер в нейтральному елементі e групи G.*

Доведення. Припустимо, що $F \subset G$ є секвенціальним α_7-простором і $\mathrm{cs}_\chi(F^{-1}F, e) \le \aleph_0$. Ми повинні довести, що $\mathrm{sb}_\chi(F, x) \le \aleph_0$ для довільної точки $x \in F$. Замінюючи F на Fx^{-1}, якщо потрібно, можна припускати, що $x = e$. Зафіксуємо зліченну сім'ю $\mathcal{A}$ підмножин G, яка є замкненою відносно добутків в G, скінченних об'єднань і перетинів, і таку, щоб $F^{-1}F \in \mathcal{A}$ і $\mathcal{A}|F^{-1}F = \{A \cap (F^{-1}F) : A \in \mathcal{A}\}$ була cs-сіткою в e простору $F^{-1}F$. Ми стверджуємо, що сім'я $\mathcal{A}|F = \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$ є sb-сіткою в e простору F.

Інакше ми б знайшли такий відкритий окіл $U \subset G$ точки e, що для кожного $A \in \mathcal{A}$ з властивістю $A \cap F \subset U$ множина $A \cap F$ не є секвенціальним бар'єром в точці e простору F.

Нехай $\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A} : A \subset F \cap U\} = \{A_n : n \in \omega\}$ і $B_n = \bigcup_{k \le n} A_k$. Покладемо $m_{-1} = 0$ і позначимо через $U_{-1} \subset U$ довільний замкнений окіл e в G. По індукції для довільного $k \in \omega$ знайдемо номер $m_k > m_{k-1}$, замкнений окіл $U_k \subset U_{k-1}$ точки e в G, і послідовність $(x_{k,i})_{i \in \omega}$ збіжну до e, для яких виконуються наступні умови:

(i) $\{x_{k,i} : i \in \omega\} \subset U_{k-1} \cap F \setminus B_{m_{k-1}}$;

(ii) множина $F_k = \{x_{n,i} : n \le k,\ i \in \omega\} \setminus B_{m_k}$ скінченна;

(iii) $U_k \cap (F_k \cup \{x_{i,j} : i, j \le k\}) = \emptyset$ і $U_k^2 \subset U_{k-1}$.

З останньої умови випливає, що $U_0 U_1 \cdots U_k \subset U$ для всіх $k \ge 0$.

Розглянемо підпростір $X = \{x_{k,i} : k, i \in \omega\}$ простору F і зауважимо, що він є дискретним (в собі). Позначимо через $\bar{X}$ замикання X в F і зауважимо, що $\bar{X} \setminus X$ є замкненим в F. Покажемо, що e є ізольованою точкою в $\bar{X} \setminus X$.

Справді, в протилежному випадку застосовуючи Лему 1.11, ми б знайшли секвенціальне дерево $T \subset \bar{X}$, для якого $\min T = \{e\}$, $\max T \subset X$, і $\mathrm{succ}(e) \subset \bar{X} \setminus X$.

По індукції, побудуємо (скінченну) гілку $(t_i)_{i \le n+1}$ дерева T і послідовність $\{C_i : i \le n\}$ елементів сім'ї $\mathcal{A}$, для якої $t_0 = e$, $|\mathrm{succ}(t_i) \setminus t_i C_i| < \aleph_0$, $C_i \subset U_i \cap (F^{-1}F)$, і $t_{i+1} \in \mathrm{succ}(t_i) \cap t_i C_i$ для кожного $i \le n$. Тоді нескінченна множина $\sigma = \mathrm{succ}(t_n) \cap t_n C_n \subset X$ збігається до точки $t_n \ne e$.

З іншого боку,

$$\sigma \subset t_n C_n \subset t_{n-1} C_{n-1} C_n \subset \cdots \subset t_0 C_0 \cdots C_n \subset U_0 \cdots U_n \subset U.$$

З нашого припущення на $\mathcal{A}$ виплививає, що $C_0 \cdots C_n \in \mathcal{A}$, і таким чином $(C_0 \cdots C_n) \cap F \subset B_{m_k}$ для деякого k. Як наслідок, $\sigma \subset X \cap B_{m_k}$ і $\sigma \subset \{x_{j,i} : j \le k,\ i \in \omega\}$ згідно пункту (i) побудови X. Оскільки e єдиною граничною точкою множини $\{x_{j,i} : j \le k,\ i \in \omega\}$, послідовність σ не може збігатися до $t_n \ne e$, що призводить до суперечності.

Таким чином e є ізольованою точкою множини $\bar{X} \setminus X$, і отже існує замкнений окіл W точки e в G, для якого множина $V = (\{e\} \cup X) \cap W$ є замкненою в F.

Для кожного $n \in \omega$ розглянемо послідовність $S_n = W \cap \{x_{n,i} : i \in \omega\}$ збіжну до e. Оскільки F є α_7-простором, існує збіжна послідовність $S \subset F$, для якої $S \cap S_n \ne \emptyset$ для безмежно багатьох n. Беручи до уваги, що V є замкненим підпростором F з властивістю $|V \cap S| = \aleph_0$, ми отримуємо, що гранична точка $\lim S$ множини S належить V. Ми додатково можемо припустити $S \subset V$. Оскільки простір X дискретний, $\lim S \in V \setminus X = \{e\}$. Тому послідовність S збігається до e. Оскільки $\mathcal{A}'$ є cs-сіткою в e простору F, існує номер $n \in \omega$ для якого A_n містить майже всі члени послідовності S. Оскільки $S_m \cap (S_k \cup A_n) = \emptyset$ для $m > k \ge n$, послідовність S не може перетинати нескінченно багато послідовностей S_m. А це суперечить вибору S. □

Слідуючи ван Дауену [47, §8] через $\mathbb{L}$ позначимо наступний зліченний підпростір площини $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{L} = \{(0,0), (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{nm}) : n, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Простір $\mathbb{L}$ локально компактний за винятком точки $(0,0)$. Більш того, за Лемою 8.3 з роботи [47], топологічний простір X зі зліченним характером містить замкнену копію простору $\mathbb{L}$ тоді і лише тоді, коли X не є локально компактним.

Наступна важлива лема доведена у [30] для нормальних секвенціальних груп.

Лема 1.14. *Якщо секвенціальна група G містить замкнену копію простору $\mathbb{L}$, тоді G є α_7-простором.*

Доведення. Нехай $h : \mathbb{L} \to G$ є замкненим вкладенням, $x_0 = h(0,0)$, і $x_{n,m} = h(\frac{1}{n}, \frac{1}{nm})$ для $n, m \in \mathbb{N}$. Щоб довести, що G є α_7-простором, для кожного $n \in \mathbb{N}$ зафіксуємо послідовність $(y_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \subset G$ збіжну до нейтрального елемента e групи G. Позначимо через $* : G \times G \to G$ групову операцію на G.

Легко перевірити, що для кожного n підпростір $D_n = \{x_{n,m} * y_{n,m} : m \in \mathbb{N}\}$ є замкненим і дискретним в G. Тому існує послідовність $(k_n) \subset \mathbb{N}$ така, що $x_0 \neq x_{n,m} * y_{n,m}$ для всіх $m > k_n$. Розглянемо підмножину

$$A = \{x_{n,m} * y_{n,m} : n > 0,\ m > k_n\}.$$

За неперервністю групової операції $x_0 \notin A$ є граничною точкою A в G. Отже множина A є не замкненою, і тому за секвенціальністю G існує послідовність $S \subset A$ збіжна до деякої точки $a \notin A$. Оскільки кожен простір D_n є замкненим і дискретним в G, переходячи до підпослідовності, якщо потрібно, ми можемо вважати, що $|S \cap D_n| \leq 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Звідси S можна зобразити у вигляді $S = \{x_{n_i,m_i} * y_{n_i,m_i} : i \in \omega\}$ для деяких числових послідовностей (m_i) і (n_i) з властивістю $n_{i+1} > n_i$ для всіх i. Звідси випливає, що послідовність $(x_{n_i,m_i})_{i\in\omega}$ збігається до x_0, а отже послідовність $T = \{y_{n_i,m_i}\}_{i\in\omega}$ збігається до $x_0^{-1} * a$. Оскільки $T \cap \{y_{n_i,m}\}_{m\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$ для кожного i, ми отримуємо, що G є α_7-простором. $\square$

Лема 1.14 дозволяє довести наступну неочікувану

Лема 1.15. *Неметризовна секвенціальна топологічна група G зі зліченним* cs*-характером має зліченну* cs*-сітку в нейтральному елементі, елементами якої є зліченно компактні підмножини G.*

Доведення. Нехай G є неметризовною секвенціальною групою зі зліченним cs-характером. Застосувавши Леми 1.12–1.14, ми отримуємо, що G не містить замкненої копії простору $\mathbb{L}$. Зафіксуємо зліченну cs-сітку $\mathcal{N}$ в e, замкнену відносно скінченних перетинів, елементами якої є замкнені підмножини G. Покажемо, що сім'я $\mathcal{C} \subset \mathcal{N}$ всіх зліченно компактних підмножин $N \in \mathcal{N}$ є cs-сіткою в e групи G.

Щоб довести це, зафіксуємо окіл $U \subset G$ точки e і послідовність $(x_n) \subset G$ збіжну до e. Нам потрібно знайти зліченно компактну підмножину $M \in \mathcal{N}$, для якої $M \subset U$ і майже всі точки x_n містяться в M. Нехай $\mathcal{A} = \{A_k : k \in \omega\}$ – множина всіх елементів $N \subset U$ сім'ї $\mathcal{N}$, які містять майже всі точки x_n. Залишається знайти $n \in \omega$, для якого перетин $M = \bigcap_{k \le n} A_k$ є зліченно компактним. Припустимо, що для кожного $n \in \omega$ множина $\bigcap_{k \le n} A_k$ не є зліченно компактною. Тоді існує зліченний замкнений підпростір $K_0 \subset A_0$, для якого $K_0 \not\ni e$. Зафіксуємо окіл W_0 точки e з властивістю $W_0 \cap K_0 = \emptyset$. Оскільки $\mathcal{N}$ є cs-сіткою в e, існує такий $k_1 \in \omega$, що $A_{k_1} \subset W_0$.

З нашого припущення випливає, що існує зліченний дискретний підпростір $K_1 \subset \bigcap_{k \le k_1} A_k$ для якого $K_1 \not\ni e$. Продовжуючи таким чином, ми побудуємо по індукції зростаючу числову послідовність $(k_n)_{n \in \omega} \subset \omega$, послідовність $(K_n)_{n \in \omega}$ зліченних дискретних підпросторів G, і послідовність $(W_n)_{n \in \omega}$ відкритих околів e з властивостями $K_n \subset \bigcap_{k \le k_n} A_k$, $W_n \cap K_n = \emptyset$, і $A_{k_{n+1}} \subset W_n$ для всіх $n \in \omega$.

З вищенаведеної побудови випливає, що $\{e\} \cup \bigcup_{n \in \omega} K_n$ є замкненою копією простору $\mathbb{L}$, що призводить до суперечності. $\square$

1.5. Структура топологічних груп зі зліченним cs^*-характером.

Зауважимо, що топологічний простір є секвенціальним при умові, що X наділено індуктивною топологією по відношенню до покриття секвенціальними підпросторами. Зокрема, кожен $\mathcal{M}_\omega$-простір є секвенціальним і має зліченний cs^*-характер. В нашому основному результаті стверджується, що для топологічних груп обернене твердження теж вірне.

Теорема 1.16. *Кожна секвенціальна топологічна група G зі зліченним cs^*-характером є $\mathcal{M}_\omega$-групою. А саме, або G є метризовною, або ж G містить відкриту субметризовну k_ω-підгрупу H, і таким чином є гомеоморфною до добутку $H \times D$ для деякого дискретного простору D.*

Доведення. Припустимо, що G є неметризовною секвенціальною групою зі зліченним cs^*-характером. Згідно з Твердженням 1.2(1), $\mathrm{cs}_\chi(G) = \mathrm{cs}^*_\chi(G) \leq \aleph_0$.

Спочатку покажемо, що кожний зліченно компактний підпростір K групи G задовільняє першу аксіому зліченності. Простір K, будучи зліченно компактним у секвенціальному просторі G, є секвенціально компактним, а тому такими є $K^{-1}K$ і $(K^{-1}K)^{-1}(K^{-1}K)$ в G. З секвенціальної компактності простору $K^{-1}K$ випливає, що він є α_7-простором. Оскільки $\mathrm{cs}_\chi((K^{-1}K)^{-1}(K^{-1}K)) \leq \mathrm{cs}_\chi(G) \leq \aleph_0$, застосувавши Леми 1.13 і 1.12 ми отримаємо, що простір $K^{-1}K$ має зліченний sb-характер і K має зліченний характер.

Покажемо, що G містить відкриту субметризовну k_ω-підгрупу. За Лемою 1.15 G має зліченну cs-сітку $\mathcal{K}$, елементи якої є зліченно компактні. Оскільки добуток двох зліченно компактних підпросторів в групі G є зліченно компактним, ми можемо додатково вважати, що сім'я $\mathcal{K}$ є замкненою відносно скінченних добутків в G. Ми можемо також припустити, що $\mathcal{K}$ є замкненою відносно взяття оберненого, тобто $K^{-1} \in \mathcal{K}$ для кожного $K \in \mathcal{K}$. Тоді $H = \cup\mathcal{K}$ є підгрупою G. За побудовою ця підгрупа є секвенціальним бар'єром в кожній зі своїх точок, а тому є відкрито-замкненою в G. Покажемо, що топологія H є індуктивною по відношенню до покриття $\mathcal{K}$. Справді, розглянемо деяку підмножину $U \subset H$, для якої $U \cap K$ є відкритою в K для кожного $K \in \mathcal{K}$. Якщо U не є відкритою в H, тоді за секвенціальністю H існує точка $x \in U$ і послідовність $(x_n)_{n\in\omega} \subset H \setminus U$ збіжна до x. Тоді існують елементи $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ такі, що $x \in K_1$ і K_2 містить майже всі елементи послідовності $(x^{-1}x_n)$. Як наслідок, добуток $K = K_1K_2$ містить майже всі x_n, і множина $U \cap K$, будучи відкритим околом точки x в K, містить майже всі члени послідовності (x_n), що призводить до суперечності.

Як доведено раніше, кожен $K \in \mathcal{K}$ задовільняє першу аксіому зліченності, отже H має зліченний псевдохарактер, будучи зліченним об'єднанням своїх підпросторів з першою аксіомою зліченності. Тоді на H існує неперервна метрика. Оскільки кожна неперервна метрика на зліченно компактному просторі породжує його топологію, кожен $K \in \mathcal{K}$ метричним компактом, і тому H є субметризовною k_ω-підгрупою групи G.

Осільки H є відкритою в G, G гомеоморфна добутку $H \times D$ для деякого дискретного простору D. $\square$

Для $\mathcal{M}_\omega$-груп друга частина цієї теореми доведена в [30]. Теорема 1.16 має багато цікавих наслідків.

Для початку ми покажемо, що для секвенціальних топологічних груп зі зліченним cs*-характером багато важливих кардинальних інваріантів є зліченними, співпадають, або ж набувають певних фіксованих значень. Нагадаємо деякі означення, див. [15]. Для топологічного простору X

- *псевдохарактер* $\psi(X)$ є найменшим кардиналом κ таким, що кожну одноточкову підмножину $\{x\} \subset X$ можна записати у вигляді перетину $\{x\} = \cap\mathcal{U}$ деякої сім'ї $\mathcal{U}$ відкритих підмножин простору X потужності $|\mathcal{U}| \le \kappa$;

- *кліткoвість (або число Сусліна)* $c(X)$ є найменшим кардиналом κ, для якого не існує сім'ї $\mathcal{U}$ відкритих попарно неперетинних підмножин простору X потужності $|\mathcal{U}| > \kappa$;

- *число Ліндельофа* $l(X)$ є найменшим кардиналом κ таким, що кожне відкрите покриття простору X містить підпокриття потужності $\le \kappa$;

- *щільність* $d(X)$ є найменшою потужністю всюди щільної підмножини простору X;

- *тіснота* $t(X)$ є найменшим кардиналом κ таким, що для довільної підмножини $A \subset X$ і точки $a \in \bar{A}$ із її замикання існує підмножина $B \subset A$ розміру $|B| \le \kappa$ з властивістю $a \in \bar{B}$;

- *екстент* $e(X)$ є найменшим кардиналом κ таким, що X не містить замкненого дискретного підпростору потужності $> \kappa$;

- *компактно покриваюче число* $kc(X)$ – найменша потужність покриття простору X компактними підмножинами;

- *вага* $w(X)$ – найменша потужність бізи топології простору X;

- *сіткова вага* $nw(X)$ – найменша потужність $|\mathcal{N}|$ топологічної сітки простору X (сім'я $\mathcal{N}$ підмножин X є *топологічною сіткою*, якщо для довільної відкритої підмножини $U \subset X$ і точки $x \in U$ існує $N \in \mathcal{N}$ з властивістю $x \in N \subset U$);

- *k-сіткова вага* $knw(X)$ – найменша потужність $|\mathcal{N}|$ k-сітки простору X (сім'я $\mathcal{N}$ підмнжин X є *k-сіткою*, якщо для довільної відкритої підмножини $U \subset X$ і довільного компакта $K \subset U$ існує скінченна підсім'я $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ з властивістю $K \subset \cup\mathcal{M} \subset U$).

Для кожного топологічного простору X ці кардинальні інваріанти співвідносяться наступним чином:

$$\max\{c(X), l(X), e(X)\} \le nw(X) \le knw(X) \le w(X).$$

Для метризовних просторів усі вони збігаються, див. [15, 4.1.15].

В класі k-просторів природньо виникає ще один кардинальний інваріант, а саме k-тість, який був введений Е. ван Дауеном (E. van Douwen), див. [47, §8]. Нагадаємо, що топологічний простір X називається *k-простором*, якщо його топологія є індуктивною по відношенню до покриття простору X сім'єю всіх його компактних підмножин. Зрозуміло, що кожен секвенціальний простір є k-простором. *k-Тістю* $k(X)$ деякого k-простору X називається найменша потужність $|\mathcal{K}|$ такого покриття $\mathcal{K}$ простору X компактними підпросторами, що топологія на X є індуктивною топологією по відношенню до покриття $\mathcal{K}$. Відомо, що $k(\mathbb{N}^\omega) = \mathfrak{d}$ і $k(\mathbb{Q}) = \mathfrak{b}$, див. [47]. З Твердження 1.3(8) випливає, що $\mathrm{cs}^*_\chi(X) \le k(X)\cdot\psi(X) \ge kc(X)$ для кожного k-простору X. Зауважимо також, що топологічний простір X є k_ω-простором тоді і лише тоді, коли X є k-простором з властивістю $k(X) \le \aleph_0$.

Окрім кардинальних ми також будемо розглядати ординальний інваріант, який називається секвенціальним порядком. Під *секвенціальним замиканням* $A^{(1)}$ підмножини A топологічного простору X ми розуміємо множину всіх граничних точок послідовностей $(a_n) \subset A$ збіжних в X. Для ординала α визначимо α-те секвенціальне замикання $A^{(\alpha)}$ підмножини A по трансфінітній індукції: $A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha}(A^{(\beta)})^{(1)}$. Під *секвенціальним порядком* $\mathrm{so}(X)$ топологічного простору X надалі розумітимемо найменший ординал α такий, що $A^{(\alpha+1)} = A^{(\alpha)}$ для довільної підмножини $A \subset X$. Зауважимо, що топологічний простір X має властивість Фреше-Урисона тоді і лише тоді, коли $\mathrm{so}(X) \le 1$; X є секвенціальним тоді і лише тоді, коли $\mathrm{cl}_X(A) = A^{(\mathrm{so}(X))}$ для довільної підмножини $A \subset X$.

На додаток до власне топологічних інваріантів, ми також розглядатимемо кардинальні інваріанти, специфічні для топологічних груп. Для топологічної групи G визначимо $ib(G)$, *індекс обмеженості* групи G як найменший кардинал κ такий, що для дівільної непорожньої відкритої підмножини $U \subset G$ існує $F \subset G$ потужності $|F| \le \kappa$ з властивістю $G = F \cdot U$. Відомо, що $ib(G) \le \min\{c(G), l(G), e(G)\}$ і $w(G) = ib(G)\cdot\chi(G)$ для кожної топологічної групи, див. [84].

Теорема 1.17. *Кожна секвенціальна топологічна група G зі зліченним cs^*-характером має наступні властивості: $\psi(G) \le \aleph_0$, $\mathrm{sb}_\chi(G) = \chi(G) \in \{1, \aleph_0, \mathfrak{d}\}$, $ib(G) = c(G) = d(G) = l(G) = e(G) = nw(G) = knw(G)$, і $\mathrm{so}(G) \in \{1, \omega_1\}$.*

Доведення. Нехай G є неметризовною секвенціальною топологічною групою зі зліченним cs^*-характером. За Теоремою 1.16, G містить відкриту субметризовну k_ω-підгрупу H і є гомеоморфною добутку $H \times D$ для деякого дискретного простору D. Звідси випливає, що G має точково-зліченну k-сітку. За результатом Шібакова [78], кожна секвенціальна топологічна група з точково-зліченною k-сіткою і секвенціальним порядком $< \omega_1$ є метризовною. Звідси $\mathrm{so}(G) = \omega_1$. Також легко бачити, що $\psi(G) = \psi(H) \le \aleph_0$, $\chi(G) = \chi(H)$, $\mathrm{sb}_\chi(G) = \mathrm{sb}_\chi(H)$ і $ib(G) = c(G) = d(G) = l(G) = e(G) = nw(G) = knw(G) = |D| \cdot \aleph_0$.

Щоб завершити доведення залишилось показати, що $\mathrm{sb}_\chi(H) = \chi(H) = \mathfrak{d}$. З Лем 1.12 і 1.13 випливає, що група H, будучи неметризовною, не є α_7-простором, і тому містить копію простору S_ω. Тоді $\mathfrak{d} = \chi(S_\omega) = \mathrm{sb}_\chi(S_\omega) \le \mathrm{sb}_\chi(H) \le \chi(H)$. Щоб довести нерівність $\chi(H) \le \mathfrak{d}$, застосуємо результат К. Сакаї [73], згідно якого простір $\mathbb{R}^\infty \times Q$ містить замкнену топологічну копію кожного субметризовного k_ω-простору, і відому рівність $\chi(\mathbb{R}^\infty \times Q) = \chi(\mathbb{R}^\infty) = \mathfrak{d}$ (яка випливає з того, що топологія $\mathbb{R}^\infty$ є топологією ящикового добутку, див. [74, Ch.II, Ex.12]). □

З Теорем 1.16 і 1.17 ми отримаємо доволі неочікувані метризаційні теореми для топологічних груп. Нагадаємо, що топологічна група G є *повною за Вейлем*, якщо вона є повною у своїй лівій (еквівалентно, правій) рівномірності. Згідно з [71, 4.1.6], кожна k_ω-група є повною за Вейлем. Наступну метризаційну теорему можна легко отримати з Теорем 1.16, 1.17, і елементарних властивостей субметризовних k_ω-груп.

Теорема 1.18. *Секвенціальна топологічна група G зі зліченним cs^*-характером є метризовною при виконанні однієї з наступних умов:*

1. $\mathrm{so}(G) < \omega_1$;

2. $\mathrm{sb}_\chi(G) < \mathfrak{d}$;

3. $ib(G) < k(G)$;

4. *G має властивість Фреше-Урисона;*

5. *G є α_7-простором;*

6. *G не містить замкнених копій S_ω чи S_2;*

7. *G не є повною за Вейлем;*

8. *G є берівською;*

9. *$ib(G) < |G| < 2^{\aleph_0}$.*

За Теоремою 1.16, кожна секвенціальна топологічна група зі зліченним cs^*-характером є $\mathcal{M}_\omega$-групою. Як зазначено в підрозділі 1.1, Т. О. Банахом в роботі [32] доведено, що топологічна структура неметризовних пунктіформних $\mathcal{M}_\omega$-груп визначається щільністю і рангом розрідженості компактів. Звідси випливає наступна характеризація.

Теорема 1.19. *Неметризовні секвенціальні пунктіформні топологічні групи G, H зі зліченним cs^*-характером є гомеоморфними тоді і лише тоді, коли $d(G) = d(H)$ і $\mathrm{scr}(G) = \mathrm{scr}(H)$.*

Топологічна класифікація неметризовних секвенціальних локально-опуклих просторів зі зліченним cs^*-характером є навіть простішою. Кожен такий простір є гомеоморфний або до $\mathbb{R}^\infty$, або до $\mathbb{R}^\infty \times Q$, де $Q = [0,1]^\omega$ – гільбертів куб, а $\mathbb{R}^\infty$ – лінійний простір зліченної алгебраїчної розмірності з найсильнішою серед локально-опуклих топологій. Відомо, що ця топологія є індуктивною по відношенню до покриття $\mathbb{R}^\infty$ скінченновимірними лінійними підпросторами. Топологічна характеризація просторів $\mathbb{R}^\infty$ і $\mathbb{R}^\infty \times Q$ дана в [73]. В [31] показано, що кожний нескінченновимірний локально-опуклий субметризовний k_ω-простір гомеоморфний до $\mathbb{R}^\infty$ або $\mathbb{R}^\infty \times Q$. З цього результату разом з Теоремою 1.16 випливає наступний

Наслідок 1.20. *Кожний неметризовний секвенціальний локально-опуклий простір зі зліченним cs^*-характером гомеоморфний до $\mathbb{R}^\infty$ або $\mathbb{R}^\infty \times Q$.*

1.6. Топологічно однорідні простори зі зліченним cs^*-характером.

Як бачимо з Теореми 1.17, кожна секвенціальна топологічна група зі зліченним cs^*-характером має зліченний псевдохарактер. Доведення цього твердження грунтується на факті, що компактні підмножини секвенціальної топологічної групи зі зліченним cs^*-характером задовільняють першу аксіому зліченності. Це породжує припущення, що компактний простір з зліченним cs^*-характером задовільняє першу аксіому зліченності. Проте це припущення хибне: Н.Н Яковлєв [25] побудував при CH розріджений секвенціальний компакт зі зліченним sb-характером без першої аксіоми зліченності. В роботі [67] П. Нікош зауважив, що конструкція Яковлєва працює при рівності $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Більш детально, ми маємо наступне

Твердження 1.21. *При $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ існує регулярний локально компактний локально зліченний простір Y, одноточкова компактифікація αY якого є секвенціальною і задовільняє співвідношення $\aleph_0 = \mathrm{sb}_\chi(\alpha Y) < \psi(\alpha Y) = \mathfrak{c}$.*

Ми будемо використовувати попереднє твердження при побудові прикладів топологічно однорідних просторів зі зліченним cs-характером і незліченним псевдохарактером. Отже Теорема 1.17 є специфічною для топологічних груп і не допускає узагальнення до топологічно однорідних просторів.

Теорема 1.22.

1. *Існує топологічно однорідний зліченний регулярний k_ω-простір X_1 такий, що $\aleph_0 = \mathrm{sb}_\chi(X_1) < \chi(X_1) = \mathfrak{d}$ і $\mathrm{so}(X_1) = \omega$;*

2. *При $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ існує секвенціальний топологічно однорідний нульвимірний k_ω-простір X_2 з властивістю $\aleph_0 = \mathrm{cs}_\chi(X_2) < \psi(X_2) = \mathfrak{c}$;*

3. *При $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ існує секвенціальний топологічно однорідний цілком незв'зний простір X_3 з властивістю $\aleph_0 = \mathrm{sb}_\chi(X_3) < \psi(X_3) = \mathfrak{c}$.*

Доведення. Приклад зліченного топологічно однорідного k_ω-простору X_1, для якого $\mathrm{sb}_\chi(X_1) < \chi(X_1)$, є відомим в топології як простір Архангельського-Франкліна, див. [27]. Коротко нагадаємо його побудову. Нехай $S_0 = \{0, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ – збіжна послідовність, і розглянемо зліченний простір $X_1 = \{(x_i)_{i\in\omega} \in S_0^\omega : \exists n \in \omega$ для якого $x_i \neq 0 \Leftrightarrow i < n\}$ наділений найсильнішою топологією, що індукує топологію добутку на кожному компакті $\prod_{i\in\omega} C_i$, для якого існує $n \in \omega$ з властивістю $C_n = S_0$, $C_i = \{0\}$ для $i > n$, і $C_i = \{x_i\}$ для деякого $x_i \in S_0 \setminus \{0\}$ при $i < n$. По аналогії до доведення Леми 1.23 можна показати, що X_1 є топологічно однорідним k_ω-простором, для якого $\aleph_0 = \mathrm{sb}_\chi(X_1) < \chi(X_1) = \mathfrak{d}$ і $\mathrm{so}(X_1) = \omega$.

Для доведення двох інших пунктів Теореми 1.22, опишемо дві загальні конструкції, які дають змогу отримати топологічно однорідні секвенціальні простори, та дослідимо їхні властивості в Лемі 1.23. Для локально компактного простору Z позначимо через $\alpha Z = Z \cup \{\infty\}$ одноточкове розширення Z наділене топологією в якій околами точки ∞ є множини вигляду $\alpha Z \setminus K$, де K є компактною підмножиною Z. Таким чином для некомпактного локально компактного простору Z простір αZ є нічим іншим, як одноточковою компактифікацією Z. Нагадаємо, що канторовим кубом називається добуток $2^\omega = \{0,1\}^\omega$.

Розглянемо підмножини
$\Xi(Z) = \{(c, (z_i)_{i\in\omega}) \in 2^\omega \times (\alpha Z)^\omega : z_i = \infty$ для майже всіх індексів $i\}$ і
$\Theta(Z) = \{(c, (z_i)_{i\in\omega}) \in 2^\omega \times (\alpha Z)^\omega : \exists n \in \omega$, для якого $z_i \neq \infty$ тоді і лише тоді, коли $i < n\}$. Зауважимо, що $\Theta(Z) \subset \Xi(Z)$.

Наділимо простір $\Xi(Z)$ (відп. $\Theta(Z)$) найсильнішою з топологій, що індукує топологію тихонівського добутку на компактних підпножинах із сім'ї $\mathcal{K}_\Xi$ (відп. $\mathcal{K}_\Theta$), де $\mathcal{K}_\Xi = \{2^\omega \times \prod_{i\in\omega} C_i : C_i$ є компактними підмножинами αZ і майже всі $C_i = \{\infty\}\}$;
$\mathcal{K}_\Theta = \{2^\omega \times \prod_{i\in\omega} C_i :\ \exists i_0 \in \omega$ для якого $C_{i_0} = \alpha Z$, $C_i = \{\infty\}$ для всіх $i > i_0$ і C_i є компактною підмножиною Z для всіх $i < i_0\}$.

Лема 1.23. *Нехай Z є нульвимірним локально метризовним локально ком-*

пактним простором. Тоді

1. *простори* $\Xi(Z)$ *і* $\Theta(Z)$ *є топологічно однорідними;*

2. $\Xi(Z)$ *є регулярним нульвимірним* k_ω*-простором, а* $\Theta(Z)$ *є цілком незв'язним* k*-простором;*

3. *якщо* Z *є ліндельофовим, тоді* $\Xi(Z)$ *і* $\Theta(Z)$ *є нульвимірними субметризовними* k_ω*-просторами, для яких* $\chi(\Xi(Z)) = \chi(\Theta(Z)) \le \mathfrak{d}$*;*

4. $\Xi(Z)$ *і* $\Theta(Z)$ *містять копії простору* αZ*, і* $\Theta(Z)$ *містить замкнену копію* Z*;*

5. $\mathrm{cs}^*_\chi(\Xi(Z)) = \mathrm{cs}^*_\chi(\Theta(Z)) = \mathrm{cs}^*_\chi(\alpha Z)$, $\mathrm{cs}_\chi(\Xi(Z)) = \mathrm{cs}_\chi(\Theta(Z)) = \mathrm{cs}_\chi(\alpha Z)$, $\mathrm{sb}_\chi(\Theta(Z)) = \mathrm{sb}_\chi(\alpha Z)$, *і* $\psi(\Xi(Z)) = \psi(\Theta(Z)) = \psi(\alpha Z)$*;*

6. *простори* $\Xi(Z)$ *і* $\Theta(Z)$ *є секвенціальними тоді і лише тоді, коли* αZ *є секвенціальним;*

7. *якщо* Z *не є зліченно компактним, тоді* $\Xi(Z)$ *містить замкнену копію* S_2 *і* S_ω*, і* $\Theta(Z)$ *містить замкнену копію* S_2*.*

Доведення. (1) Покажемо, що простір $\Xi(Z)$ є топологічно однорідним.

Зафіксуємо точки $(c, (z_i)_{i\in\omega}), (c', (z'_i)_{i\in\omega})$ простору $\Xi(Z)$. Нам потрібно знайти автогомеоморфізм h простору $\Xi(Z)$ для якого $h(c, (z_i)_{i\in\omega}) = (c', (z'_i)_{i\in\omega})$. Оскільки канторів куб 2^ω є топологічно однорідним, можемо вважати, що $c \neq c'$. Зафіксуємо довільні відкрито-замкнені околи U, U' точок c, c' в 2^ω відповідно.

Розглянемо скінченні множини $I = \{i \in \omega : z_i \neq \infty\}$ і $I' = \{i \in \omega : z'_i \neq \infty\}$. Використовуючи нульвимірність і локальну метризовність простору Z, для кожного $i \in I$ (відп. $i \in I'$) зафіксуємо відкритий компактний метризовний окіл U_i (відп. U'_i) точки z_i (відп. z'_i) в Z. За класичною теоремою Брауера [58, 7.4], добутки $U \times \prod_{i\in I} U_i$ і $U' \times \prod_{i\in I'} U'_i$, будучи нульвимірними компактними метризовними просторами без ізольованих точок, є гомеоморфними канторовому кубу 2^ω. Тепер з топологічної однорідності канторового кубу випливає існування гомеоморфізму $f : U \times \prod_{i\in I} U_i \to U' \times \prod_{i\in I'} U'_i$ для якого $f(c,(z_i)_{i\in I}) = (c',(z'_i)_{i\in I'})$. Покладемо

$W = \{(x,(x_i)_{i\in\omega}) \in \Xi(Z) : x \in U,\ x_i \in U_i$ для всіх $i \in I\}$ і

$W' = \{(x',(x'_i)_{i\in\omega}) \in \Xi(Z) : x' \in U',\ x'_i \in U'_i$ для всіх $i \in I'\}$.

Множини W, W' є диз'юнктними відкрито-замкненим підмножинами $\Xi(Z)$. Нехай $\chi : \omega \setminus I' \to \omega \setminus I$ – єдина монотонна бієкція.

Розглянемо гомеоморфізм $\tilde f : W \to W'$, який ставить у відповідність послідовності $(x,(x_i)_{i\in\omega}) \in W$ послідовність $(x',(x'_i)_{i\in\omega}) \in W'$, де $(x',(x'_i)_{i\in I'}) = f(x,(x_i)_{i\in I})$ і $x'_i = x_{\chi(i)}$ для $i \notin I'$. Нарешті визначимо автогомеоморфізм h простору $\Xi(Z)$, поклавши

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \notin W \cup W'; \\ \tilde f(x), & \text{якщо } x \in W; \\ \tilde f^{-1}(x), & \text{якщо } x \in W' \end{cases}$$

і зауважимо, що $h(c,(z_i)_{i\in\omega}) = (c',(z'_i)_{i\in\omega})$, звідки і випливає топологічна однорідність простору $\Xi(Z)$.

Міняючи $\Xi(Z)$ на $\Theta(Z)$ в попередньому доведенні, ми отримаємо доведення топологічної однорідності простору $\Theta(Z)$.

Пункти (2–4) безпосередньо випливають з означень просторів $\Xi(Z)$ і $\Theta(Z)$, нульвимірності αZ, і відомих властивостей k_ω-просторів, див. [49] (щоб знайти замкнену копію Z в $\Theta(Z)$, потрібно розглянути замкнене вкладення $e : Z \to \Theta(Z)$, $e : z \mapsto (z, z_0, z, \infty, \infty, \dots)$, де z_0 є фіксованою точкою Z).

Щоб довести (5), застосуємо Твердження 1.3(6,8,9,10). (Щоб обчислити cs*-, cs-, і sb-характери простору $\Theta(Z)$, слід зауважити, що майже всі члени довільної послідовності $(a_n) \subset \Theta(Z)$, збіжної до точки $a = (c,(z_i)) \in \Theta(Z)$, лежать в компакті $2^\omega \times \prod_{i\in\omega} C_i$, де C_i є віза околом z_i, якщо $z_i \neq \infty$; $C_i = \alpha Z$, якщо $i = \min\{j \in \omega : z_j = \infty\}$, і $C_i = \{\infty\}$ в іншому випадку. За Твердженням 1.3(6), cs*-, cs-, і sb-характери цього компакта співпадають з відповідними характерами простору αZ.)

(6) Оскільки простори $\Xi(Z)$ і $\Theta(Z)$ містять копії αZ, з секвенціальності $\Xi(Z)$ чи $\Theta(Z)$ випливає секвенціальність αZ. Тепер припустимо, що простір αZ є секвенціальним. Тоді кожен компакт $K \in \mathcal{K}_\Xi \cup \mathcal{K}_\Theta$ є севенціальним, оскільки добуток скінченного числа секвенціальних компактів є секвенціальним, див. [15, 3.10.I(b)]. Таким чином простори $\Xi(Z)$ і $\Theta(Z)$ є секвенціальними, бо їхні топології є індуктивними по відношенню до покриттів $\mathcal{K}_\Xi$, $\mathcal{K}_\Theta$ секвенціальними компактами.

(7) Якщо Z не є зліченно компактним, тоді він містить зліченний замкнений дискретний підпростір $S \subset Z$, який є збіжною до ∞ послідовністю в αZ. Легко бачити, що $\Xi(S)$ (відп. $\Theta(S)$) є замкненою підмножиною $\Xi(Z)$ (відп. $\Theta(Z)$). Це дає нам змогу знайти замкнені копії S_2 і S_ω в $\Xi(S)$ і замкнену копію S_2 в $\Theta(S)$. $\square$

Щоб побудувати приклади, які задовільняють умови Теореми 1.22(2,3), припустимо $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Тоді за Твердженням 1.21 існує локально компактний локально зліченний простір Z, чия одноточкова компактифікація αZ є секвенціальною і задовільняє умови $\aleph_0 = \mathrm{sb}_\chi(\alpha Z) < \psi(\alpha Z) = \mathfrak{c}$. Застосовуючи Лему 1.23 до цього простору Z, ми отримуємо, що топологічно однорідні k-простори $X_2 = \Xi(Z)$ і $X_3 = \Theta(Z)$ і є шуканими прикладами. $\square$

Нагадаємо, що простір X є *цілком незв'язним*, якщо для довільних двох різних точок $x, y \in X$ існує неперервна функція $f : X \to \{0, 1\}$ така, що $f(x) \neq f(y)$, див. [48].

Зауваження. Як вже зазначалося, простір X_1 з Теореми 1.22(1) є добре відомим прикладом Архангельського-Франкліна [27] (див. також [46, 10.1]) зліченного топологічно однорідного k_ω-простору, не гомеоморфного до топологічної групи (це також випливає з Теореми 1.17). З іншого боку, як було показано в [95], кожен топологічно однорідний зліченний регулярний простір (зокрема, X_1) є гомеоморфним до *квазітопологічної групи*, тобто топологічного простору наділеного нарізно неперервною груповою операцією з неперервною інверсією. Звідси випливає, що Теорема 1.17 не може бути узагальненою до квазітопологічних груп. $\square$

1.7. Висновки.

У цьому розділі введено три нових локальних кардинальних інваріанти топологічних просторів, а саме sb-характер, cs-характер і cs*-характер, і досліджено їхні базові властивості.

Подібні поняття вже виникали в топологічній літературі: (секвенціальний T_1-) простір має зліченний sb-характер тоді і лише тоді коли він є універсально csf-зліченним в сенсі [61] (тоді і лише тоді, коли він задовільняє слабу першу аксіому зліченності введену Архангельським в [1], тоді і лише тоді, коли він є o-метризовним за Нєдєвим [20]). Топологічний простір має зліченний cs-характер тоді і лише тоді, коли він є csf-зліченним згідно з [61].

Для секвенціальних топологічних груп зліченність cs-характеру є еквівалентною до того, що топологічний простір групи є $\mathcal{M}_\omega$-простором, що дає узагальнення результату М.М. Чобана і С.Й. Нєдева [19].

У вищенаведеній характеризації $\mathcal{M}_\omega$-груп суттєвою є наявність деякої групової структури пов'язаної з топологією. Зокрема вона не залишається вірною для топологічно однорідних просторів.

РОЗДІЛ 2

o-Обмеженість вільних об'єктів над тихонівським простором

2.1. Огляд літератури і основних результатів розділу.

Мотивацією для досліджень, проведених в цьому розділі, є робота Хернандеса, Робі та Ткаченка [52], де була поставлена проблема характеризіції тихонівських просторів X, вільна (абелева) топологічна група $F(X)$ $(A(X))$ над якими є [сильно] o-обмеженою. Власне кажучи, ця проблема складається з чотирьох підпроблем. Три з них (за винятком характеризіції o-обмеженості вільної групи $F(X)$) розв'язані в цьому розділі, див. Теореми 2.23 та 2.24. Подібна характеризація певної проміжної властивості між сильною o-обмеженістю та o-обмеженістю доведена в Теоремі 2.25. Надалі "топологічний простір" означає "тихонівський простір", тобто цілком регулярний T_1-простір.

Таким чином, основними об'єктами, що розглядаються в цьому розділі, є вільна (абелева) топологічна група над топологічним простором X, тобто (абелева) топологічна група G, яка містить X як множину генераторів і задовільняє наступну умову: кожна неперервна функція $\varphi : X \to H$ з X в довільну (абелеву) топологічну групу H допускає єдине продовження до неперервного гомоморфізму $\tilde{\varphi} : G \to H$ (базові властивості вільних топологічних груп можна знайти в [14] або [85]). Як звично через $C_p(X)$ ми позначаємо топологічний простір неперервних дійснозначних функцій визначених на X, наділений топологією успадкованою з тихонівського добутку $\mathbb{R}^X$. Відомо [8, 0.5.5], що відображення $x \mapsto \psi_x$, де $\psi_x(f) = f(x)$ для всіх $f \in C_p(X)$, є замкненим вкладенням простору X в $C_pC_p(X)$, для якого образ простору X є лінійно незалежним. Надалі через $L_p(X)$ позначимо лінійну оболонку X в $C_pC_p(X)$ з топологією підпростору. Лінійний топологічний простір $L_p(X)$ є вільним об'єктом над X в категорії лінійних топологічних просторів зі слабкою топологією, див. [23].

Однією з перших задач про вільні топологічні групи було дослідити, чи гомеоморфні топологічні простори X та Y, якшо їх вільні топологічні групи $F(X)$ і $F(Y)$ топологічно ізоморфні (надалі такі простори називатимемо M-еквівалентними). Дана задача була поставлена А.А. Марковим у роботі [18] (див. Проблеми I,II в цій роботі), і негативна відповідь на неї була отримана у роботі [11, § 5] М.І. Граєва. Там же ж було поставлене питання: які топологічні властивості зберігаються відношенням M-еквівалентності (тобто є M-інваріантними). Також нагадаємо, що топологічні простори X і Y називаються

- *A-еквівалентними*, якщо топологічні групи $A(X)$ і $A(Y)$ топологічно ізоморфні;
- *l-еквівалентними*, якщо $C_p(X)$ і $C_p(Y)$ ізоморфні як лінійні топологічні простори;
- *t-еквівалентними*, якщо $C_p(X)$ і $C_p(Y)$ гомеоморфні.

По аналогії з M-інваріантністю вводяться поняття A-, l-, та t-інваріантності: топологічна властивість є A-інваріантною (відп. l-інваріантною, t-інваріантною), якщо вона зберігається відношенням A-еквівалентності (відп. l-еквівалентності, t-еквівалентності). Згідно з [8, 0.5.12], простір X є l-еквівалентним до простору Y тоді і лише тоді, коли $L_p(X)$ є лінійно гомеоморфним до $L_p(Y)$. Ми використовуватимемо це як альтернативне означення відношення l-еквівалентності. Відомо [5, §6], що з M-еквівалентності випливає A-еквівалентність, з A-еквівалентності випливає l-еквівалентність, а з останньої слідує t-еквівалентність. Тому довільна t-інваріантна властивість є l-інваріантною, l-інваріантна властивість є A-інваріантною, і кожна A- інваріантна властивість є M-інваріантною. Різноманітні приклади φ-інваріантних властивостей можна знайти в [8, Розд. 2], [85], і [86], [92], де φ пробігає множину M, A, l, та t. Зокрема ми суттєво використовуватимемо l-інваріантність ліндельофовості, яку доведено в [92] (див. також [44], де доведено l-інваріантність числа Ліндельофа).

В цьому розділі ми доводимо l-інваріантність властивостей Гуревича, Скіперза, а також і властивості Менгера при деяких додаткових припущеннях (означення цих властивостей наведені нище), див. Наслідок 2.27. Варто зауважити, що ці властивості не зберігаються скінченними добутками (див. [55, Th. 2.12]), що не дозволяє використовувати той факт, що вільна (абелева) топологічна група над простором X може бути подана як зліченне об'єднання неперервних образів скінченних степенів X. Вони також не є спадковими [40], і тому відповідні доведення не можуть бути зведеними до використання класичного результату В.Г. Пестова [22], в якому стверджується, що якщо X є M-еквівалентним простору Y, тоді X можна подати у вигляді зліченного об'єднання підпросторів, кожен з яких гомеоморфний деякому підпростору Y.

Вищезгадані властивості Гуревича, Скіперза, та Менгера топологічних просторів, а також o-обмеженість топологічних груп відносять [88, 74] до *селекційних принципів*, під якими ми розуміємо комбінаторні властивості певної сім'ї відкритих покриттів топологічного простору. Поняття o-обмеженої топологічної групи введене О.Г. Окунєвим і М.Г. Ткаченком з метою характеризації підгруп σ-компактних груп, (обговорення цієї проблеми можна знайти в [51], [52], і [84]). Нагадаємо, що топологічна група G є *o-обмеженою*, якщо для кожної послідовності $(U_n)_{n\in\omega}$ непорожніх відкритих підмножин G існує послідовність $(F_n)_{n\in\omega}$ скінченних підмножин G, для якої $G = \bigcup_{n\in\omega} F_n \cdot U_n$. Зрозуміло, що кожна σ-компактна група є o-обмеженою, і кожна o-обмежена топологічна група є ω-обмеженою, де топологічна група G є *ω-обмеженою* [13], якщо її можна покрити зліченним числом лівих (еквівалентно правих) зсувів довільної відкритої підмножини. І.Й. Гуран в своїй кандидатській дисертації [13, Теор. 4.5] показав, що вільна топологічна група $F(X)$ над топологічним простором X ω-обмежена тоді і лише тоді, коли таким є рівномірний простір $(X,\mathcal{U}(X))$ (тут через $\mathcal{U}(X)$ позначається *універсальна рівномірність* на просторі X, тобто максимальною серед рівномірнотей, що породжують топологію простору X). Рівномірний простір є *ω-обмеженим*, якщо кожне рівномірне покриття цього простору містить зліченне підпокриття. Цей результат використовуватиметься при характеризації o-обмеженості вільних об'єктів.

Властивості топологічного простору X, що виникають як відповідники o-обмеженості вільної групи і лінійного топологічного простору $L_p(X)$ є близькими до історично перших із селекційних принципів, а саме покриттєвих властивостей Менгера і Гуревича[5], які були введені на початку 20-го століття (їхню історію і базові властивості можна знайти в [76] або в оглядовій статті [88]). Через майже 70 років М. Скіперз систематизував існуючі і ввів нові властивості цього типу. Серед них властивість $\bigcup_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O},\Omega)$ є найбільш важливою для нас, і тому ми називатимемо її властивістю Скіперза. Щоб означити три вищенаведені селекційні принципи, нагадаємо з [50] означення деяких класів покриттів: сім'я $\{U_n : n \in \omega\}$ підмножин X називається

- *ω-покриттям* множини X, якщо для кожної скінченної підмножини $F \subset X$ існує $n \in \omega$ з властивістю $F \subset U_n$;

- *γ-покриттям* множини X, якщо для кожного $x \in X$ множина $\{n \in \omega : x \notin U_n\}$ є скінченною.

Нехай B є підмножиною множини X і u є покриттям X. Скажемо, що B є *u-обмеженою,* якщо $B \subset \cup c$ для деякої скінченної підсім'ї $c \subset u$. Топологічний простір X має властивість *Менгера* (відп. *Скіперза, Гуревича*), якщо для довільної послідовності $(u_n)_{n\in\omega}$ відкритих покриттів простору X існує (ω-, γ-)покриття $\{B_n : n \in \omega\}$ простору X u_n-обмеженими множинами B_n. Властивості Менгера і Скіперза відрізняються при CH згідно з [55, Th. 2.8], і співпадають при умові ($\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$) згідно з Теоремою 2.22 (див. також [93, Cor. 2]). Означення, а також співвідношення між малими кардиналами можна знайти в [91]. Як буде доведено в Лемі 2.8, o-обмеженість (всіх скінченних степенів) топологічної групи еквівалентна до властивості Менгера (Скіперза) застосованої до сім'ї рівномірних покриттів по відношенню до лівої рівномірності на цій групі.

[5]Властивості $\bigcup_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ і $\bigcup_{\mathrm{fin}}(\mathcal{O},\Gamma)$ в термінах М. Скіперза [76].

Дуальність між властивостями топологічного простору X і $F(X)$, $A(X)$, і $C_p(X)$ представлена багатьма результатами, див. [85] і [8]. Зокрема, з основного результату статті [7] ми отримуємо, що властивість Менгера всіх скінченних степенів простору X еквівалентна до властивості Скіперза всіх скінченних степенів цього простору, яка, в свою чергу, еквівалентна до зліченності віяльної тісноти $C_p(X)$ (означення останньої можна знайти в [7] чи [8]). Як наслідок, властивість Менгера всіх скінченних степенів топологічного простору є t-інваріантною. Але Питання II.2.8 поставлене О.В. Архангельським в [8] про t-інваріантність властивості Менгера досі нерозв'язане. Тому l-інваріантність властивості Менгера при додатковому теоретико-множинному припущенні $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$, що є одним з основних результатів цього розділу, можна вважати певним просуванням у напрямку розв'язання цього питання Архангеьського.

o-Обмеженість як і властивість Менгера мають природні ігрові аналоги. У випадку σ-компактної групи G послідовність $(F_n)_{n\in\omega}$, яка вказує на o-обмеженість G, може бути побудована другим гравцем у процесі нескінченної гри OF введеної в [84]. Ця гра грається двома гравцями, скажімо I і II. Гравець I вибирає відкриту підмножину U_0 групи G, а гравець II відповідає вибором скінченної підмножини F_0 групи G. За другим ходом, гравець I вибирає відкриту підмножину $U_1 \subset G$, і II знову відповідає вибором скінченної підмножини F_2 групи G, і так далі. В кінці даної гри ми отримуємо послідовності $(U_n)_{n\in\omega}$ і $(F_n)_{n\in\omega}$. Гравець II виграє, якщо $\bigcup_{n\in\omega} F_n \cdot U_n = G$. Інакше виграє гравець I. Група G називається *сильно o-обмеженою*, якщо другий гравець (=гравець II) має виграшну стратегію в грі OF на G. Якщо жоден з гравців не має виграшної стратегії, тоді G називається *OF-недетермінованою.* Легко бачити, що кожна σ-компактна група є сильно o-обмеженою і, як наслідок, o-обмеженою. Приклади, що розрізняють σ-компактність, сильну o-обмеженість і o-обмеженість можна знайти в [34], [51], [84], і [87].

В наступному підрозділі ми дамо означення гри $H(X)$ на топологічному просторі X, введеної Р. Тельгарським на початку 80-х в статті [82] (неявно присутню ще в ранніх роботах В. Гуревича, див. [76]), який довів, що другий граєць має виграшну стратегію в цій грі тоді і лише тоді, коли X є C-подібним, що означає існування виграшної стратегії для першого гравця в компактно-відкритій грі на X, див. [83, §8]. В сучасній термінології гра $H(X)$ називається грою Менгера на X, див. [76]. В Теоремі 2.24 ми покажемо, що в класі ліндельофових просторів існування виграшної стратегії для другого гравця в грі Менгера на топологічному просторі X (тобто C-подібність) еквівалентна до сильної o-обмеженості вільних об'єктів $F(X)$, $A(X)$, та $L_p(X)$. Оскільки кожен спадково ліндельофовий C-подібний простір X є σ-компактним [80, 81, 75], то вказані вільні об'єкти над спадково ліндельофовим простором є сильно o-обмеженими тоді і лише тоді, коли цей простір є σ-компактним. Це дає нам метод побудови OF-недетермінованих топологічних груп реалізований в Наслідку 2.30. Проблема побудови OF-недетермінованих груп поставлена в [84] і розв'язана в роботах [59] і [33] (і, можливо, ще десь) незалежно.

2.2. Мультипокриті простори.

Під *мультипокритим простором*[6] ми розуміємо пару (X, λ), що складається з множини X та *мультипокриття* λ множини X, тобто сім'ї покриттів X. Існує багато природніх прикладів мультипокритих просторів:

- Кожен топологічний простір X можна розглядати як мультипокритий простір $(X, \mathcal{O})$, де $\mathcal{O}$ є сім'єю всіх відкритих покриттів простору X;
- Кожен метричний простір (X, ρ) має природнє мультипокриття λ_ρ, що складається з покриттів ε-кулями: $\lambda_\rho = \{\{B_\rho(x, \varepsilon) : x \in X\} : \varepsilon > 0\}$, де $B_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(y, x) < \varepsilon\}$;
- На кожному рівномірному просторі $(X, \mathcal{U})$ можна задати мультипокрит-

[6]Поняття мультипокритого простору і деякі суміжні поняття, а також Наслідки 2.14 і 2.15 доведені Т.О. Банахом. Мультипокриті простори, які є найбільш загальними об'єктами, де можна визначити властивості подібні до (сильної) o-обмеженості, є об'єктом дослідження монографії [37].

тя $\lambda_{\mathcal{U}}$, яке складається з рівномірних покриттів, тобто $\lambda_{\mathcal{U}} = \{\{U(x) : x \in X\} : U \in \mathcal{U}\}$, де $U(x) = \{y \in X : (x,y) \in U\}$;

- Зокрема, кожна топологічна група G має чотири природніх мультипокриття $\lambda_L(G)$, $\lambda_R(G)$, $\lambda_{L\vee R}(G)$ і $\lambda_{L\wedge R}(G)$, що відповідають до її лівої, правої, двосторонньої рівномірностей, а також рівномірності Рольке[7];

- У випадку абелевої топологічної групи G всі ці чотири рівномірності співпадають, і ми позначатимемо їх через $\mathcal{U}(G)$. Сім'я $\{\{(x,y) : x - y \in U\} : 0 \in U \in \mathcal{O}(G)\}$ є базою $\mathcal{U}(G)$. Як наслідок, співпадають і відповідні мультипокриття, і ми позначатимемо їх через $\lambda(G)$.

Мультипокритий простір (X, λ) називається

- *цілком обмеженим*, якщо X є u-обмеженим для кожного покриття $u \in \lambda$;

- *ω-обмеженим*, якщо кожне покриття $u \in \lambda$ має зліченне підпокриття.

Ці поняття є узагальненнями ω-обмеженості рівномірного простору введеної І.Й. Гураном в [13, §4] і цілковитої обмеженості рівномірного простору відповідно: рівномірний простір $(X,\mathcal{U})$ має одну з цих властивостей тоді і лише тоді, коли її має мультипокритий простір $(X, \lambda_{\mathcal{U}})$). Більш детально, рівномірний простір $(X,\mathcal{U})$ є ω-обмеженим, якщо для кожного $U \in \mathcal{U}$ існує зліченна підмножина $C \subset X$, для якої $\bigcup_{c\in C} U(c) = X$, де $U(c) = \{x \in X : (c,x) \in U\}$. Топологічна група G є ω-обмеженою, якщо таким є її лівий рівномірний простір. Також очевидно, що мультипокритий простір $(X, \mathcal{O}(X))$ є цілком обмеженим (ω-обмеженим) тоді і лише тоді, коли топологічний простір X є компактним (ліндельофовим).

Властивості Менгера, Скіперза, і Гуревича можна також природньо ввести для мультипокритих просторів: мультипокритий простір (X, λ) має *властивість Менгера* (відп. *Скіперза, Гуревича*)[8], якщо для довільної послідовності покриттів $(u_n)_{n\in\omega} \in \lambda^\omega$ існує послідовність $(B_n)_{n\in\omega}$ підмножин X, для

[7] Більш детальна інформація про ці рівномірності може бути знайдена в [72]

[8] В цьому випадку ми також казатимемо, що мультипокритий простір (X, λ) є *менгеровим* (відп. *скіперзовим, гуревичевим*).

якої B_n є u_n-обмеженим і $\{B_n : n \in \omega\}$ є покриттям (відп. ω-покриттям, γ-покриттям) множини X.

Неважко перевірити, що кожен менгерівський мультипокритий простір є ω-обмеженим. Крім того, топологічна група G є o-обмеженою тоді лише тоді, коли мультипокритий простір $(G, \lambda_R(G))$ має властивість Менгера.

По аналогії до гри OF на топологічній групі G можна ввести *гру* CB (скорочено від Cover-Bounded) на мультипокритому просторі (X, λ) наступним чином: два гравці, I і II, крок за кроком вибирають покриття $u_n \in \lambda$ і u_n-обмежену підмножину $B_n \subset X$ відповідно. Гравець II виграє, якщо $X = \bigcup_{n\in\omega} B_n$. В протилежному випадку виграє гравець I. Мультипокритий простір (X, λ) називається *виграшним*, якщо другий гравець має виграшну стратегію в грі CB на (X, λ). Таким чином гра OF на топологічній групі G є еквівалентною до гри CB на мультипокритому просторі (G, λ_L), що означає, що один з гравців має виграшну стратегію в одній з цих ігор тоді і лише тоді, коли він має виграшну стратегію в іншій грі. Також зауважимо, що гра CB на мультипокритому просторі $(X, \mathcal{O}(X))$ є нічим іншим, як грою Менгера, введеною Р. Тельгарським в статті [82] під назвою $H(X)$.

В доведеннях вищенаведених результатів використовуватиметься ряд допоміжних тверджень про мультипокриті простори. Власне кажучи, усі ці твердження є (наслідками більш загальних тверджень, які) доведені в [37].

Їхні формулювання потребують деяких додаткових означень та позначень. Для рівномірних просторів $(X_1, \mathcal{U}_1)$ і $(X_2, \mathcal{U}_2)$ ми ототожнюватимемо рівномірність на декартовому добутку $X_1 \times X_2$ породжену $\mathcal{U}_1$ і $\mathcal{U}_2$ з добутком $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. Нехай u і λ є покриттям і мультипокриттям множини X відповідно, і $Z \subset X$. Тоді через $u|Z$ позначатимемо сім'ю $\{U \cap Z : U \in u\}$, і покладемо $\lambda|Z = \{u|Z : u \in \lambda\}$. Підмножину Z множини X з мультипокриттям $\lambda|Z$ називатимемо *підпростором* мультипокритого простору (X, λ). Під добутком мультипокриттів λ і ν множин X і Y ми розуміємо мультипокриття $\eta = \{u \cdot v : u \in \lambda, v \in \nu\}$ множини $X \times Y$, де $u \cdot v = \{U \times V : U \in u, V \in v\}$. Знову, ми ототожнюємо η з добутком $\lambda \times \nu$.

Ми також використовуватимемо передпорядок $\prec$ на сім'ї усіх покриттів множини X, де $u \prec v$ означає, що кожна v-обмежена підмножина є u-обмеженою. Іншими словами, $u \prec v$ тоді і лише тоді, коли для кожної скінченної підмножини c покриття v існує скінченна підмножина d покриття u з властивістю $\cup d \supset \cup c$. Усі мультипокриття λ, які розглядаються в цьому розділі, є *центрованими*, що означає обмеженість зверху в λ довільної скінченної підмножини c мультипокриття λ по відношенню до передпорядку $\prec$. Також зауважимо, що $u \prec v$, у випадку коли v є вписаним в u в тому розумінні, що кожен $V \in v$ міститься в деякому $U \in u$. Передпорядок $\prec$ на сім'ї всіх покриттів множини X породжує наступний передпорядок на сім'ї всіх мультипокриттів множини X, який ми також позначатимемо через $\prec$: $\lambda \prec \nu$ тоді і лише тоді, коли для кожного $u \in \lambda$ існує $v \in \nu$ з властивістю $u \prec v$. Скажемо, що мультипокриття λ і ν множини X є *еквівалентними* (на письмі позначатимемо це $\lambda \cong \nu$), якщо $\lambda \prec \nu$ і $\nu \prec \lambda$. Нехай λ і ν є мультипокриттями множин X і Y відповідно. Скажемо, що функція $f : X \to Y$ є

- *рівномірно обмеженою*, якщо для кожного $v \in \nu$ існує $u \in \lambda$, для якого образ $f(A)$ кожної u-обмеженої підмножини $A \subset X$ є v-обмеженим;
- *досконалим*, якщо для довільного $u \in \lambda$ існує $v \in \nu$ для якого прообраз $f^{-1}(B)$ довільної v-обмеженої підмножини $B \subset Y$ є u-обмеженим.

В наступному простому твердженні зібрано деякі базові властивості вищевведених понять.

Твердження 2.1. (1) *Нехай $(X_1,\mathcal{U}_1)$ і $(X_2,\mathcal{U}_2)$ є рівномірними просторами. Тоді мультипокриття $\lambda_{\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2}$ і $\lambda_{\mathcal{U}_1} \times \lambda_{\mathcal{U}_2}$ декартового добутку $X_1 \times X_2$ є еквівалентними.*

(2) *Нехай G і H є топологічними групами і $T \in \{L, R, L \vee R, L \wedge R\}$. Тоді $\lambda_T(G \times H)$ є еквівалентним до $\lambda_T(G) \times \lambda_T(H)$.*

(3) *Нехай G є топологічною групою. Тоді $\lambda_L(G) \cong \{\{gU : g \in G\} : e \in U \in \mathcal{O}(G)\}$,*

$$\lambda_R(G) \cong \{\{Ug : g \in G\} : e \in U \in \mathcal{O}(G)\},$$
$$\lambda_{L\vee R}(G) \cong \{\{gU \cap Ug : g \in G\} : e \in U \in \mathcal{O}(G)\},$$
$$\lambda_{L\wedge R}(G) \cong \{\{UgU : g \in G\} : e \in U \in \mathcal{O}(G)\}.$$

(3′) *Для абелевої групи G мультипокриття $\lambda(G)$ еквівалентне до $\{\{g+U : g \in G\} : e \in U \in \mathcal{O}(G)\}$.*

(4) *Нехай λ і ν є мультипокриттями множини X і $\lambda \prec \nu$. Тоді (X,λ) має властивість Менгера (відп. Скіперза, Гуревича, є виграшним) при умові, що таким є мультипокритий простір (X,ν).*

(5) *Якщо мультипокриття λ і ν множини X є еквівалентними, тоді мультипокритий простір (X,λ) має властивість Менгера (відп. Скіперза, Гуревича, є виграшним) тоді і лише тоді, коли таким є мультипокритий простір (X,ν).*

(6) *$\lambda \prec \nu$ тоді і лише тоді, коли тотожнє відображення id_X є досконалим по відношенню до мультипокриттів λ і ν.*

(7) *Якщо $f : X \to Y$ є досконалим по відношенню до мультипокриттів λ і ν множин X і Y відповідно, тоді (X,λ) є менгеровим (відп. скіперзовим, гуревичевим, виграшним) якщо таким є (Y,ν).*

(8) *Якщо $f : X \to Y$ є рівномірно обмеженим по відношенню до мультипокриттів λ та ν і мультипокритий простір (Y,ν) є виграшним (відп. гуревичевим, скіперзовим, менгеровим), тоді таким є (X,λ).*

Доведення. Через те, що всі пункти безпосередньо випливають з відповідних означень, ми наведемо доведення лише "виграшної" частини сьомого пункту. Для цього розглянемо поняття виграшної стратегії в грі CB на мультипокритому просторі (X,λ) з більш формальної точки зору. Під стратегією другого гравця ми розумітимемо відображення $\Theta : \lambda^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$, яке кожній скінченній послідовності покриттів $(u_0,\dots,u_n) \in \lambda^{<\omega}$ ставить у відповідність u_n-обмежену підмножину $\Theta(u_0,\dots,u_n)$ множини X, де $\lambda^{<\omega} =$

$\bigcup_{n\in\omega}\lambda^n$. Така стратегія є *виграшною*, якщо сім'я $\{\Theta(u_0,\dots,u_n) : n \in \omega\}$ покриває X для кожної послідовності $(u_n)_{n\in\omega}$.

Припустимо, що Θ_Y є виграшною стратегією другого гравця в грі CB на мультипокритому просторі (Y,ν). Побудуємо відображення $\phi : \lambda \to \nu$, для якого $f^{-1}(B)$ є u-обмеженою для довільної $\phi(u)$-обмеженої підмножини $B \subset Y$. Залишилось зауважити, що

$$\Theta_X : (u_0,\dots,u_n) \mapsto f^{-1}(\Theta_Y(\phi(u_0),\dots,\phi(u_n)))$$

є виграшною стратегією другого гравця у грі CB на (X,λ). $\square$

Ми будемо використовувати наступний важливий результат В.Г. Пестова, див. [21] або [85, 2.8].

Твердження 2.2. *Для кожного топологічного простору X групова рівномірність на $A(X)$ індукує універсальну рівномірність $\mathcal{U}(X)$ на X.*

Ми також будемо використовувати наступний наслідок з [60, Lemma 1.0].

Наслідок 2.3. *Якщо X є ліндельофовим регулярним простором і u є відкритим покриттям простору X, тоді існує неперервна псевдометрика d на X, для якої кожна підмножина $Y \subset X$ скінченного діаметра* $\operatorname{diam}_d(Y) < \infty$ *є u-обмеженою (тут, як звичайно,* $\operatorname{diam}_d(Y) = \sup\{d(y_1,y_2) : y_1,y_2 \in Y\}$*).*

Наслідок 2.4. *Для кожного ліндельофового регулярного простору X мультипокриття $\mathcal{O}(X)$ і $\lambda_{\mathcal{U}(X)}$ є еквівалентними.*

Доведення. Оскільки в кожне рівномірне покриття можна вписати відкрите покриття, то $\lambda_{\mathcal{U}(X)} \prec \mathcal{O}(X)$.

Щоб довести, що $\mathcal{O}(X) \prec \lambda_{\mathcal{U}(X)}$, зафіксуємо довільне відкрите покриття u простору X і знайдемо псевдометрику d на X таку, як в Лемі 2.3. Тоді для рівномірного покриття $v = \{B_d(x,1) : x \in X\} \in \lambda_{\mathcal{U}(X)}$ ми, очевидно, матимемо $u \prec v$, що і треба було довести. $\square$

Поєднуючи Наслідок 2.4 із Твердженням 2.1, ми отримуємо наступний

Наслідок 2.5. *Мультипокритий простір $(X, \mathcal{O}(X))$ є виграшним (відп. менгеровим, скіперзовим, гуревичевим) тоді і лише тоді, коли таким є мультипокритий простір $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ і X є ліндельофовим.*

Зауважимо, що мультипокритий простір $(X, \mathcal{O}(X))$ має властивість Менгера (відп. Скіперза, Гуревича) тоді і лише тоді, коли цю властивість має топологічний простір X. Що стосується виграшності мультипокритого простору $(X, \mathcal{O}(X))$, вона має багато еквівалентів, див. обговорення цього в попередньому підрозділі. Серед них ми відзначимо C-подібність, якій присвячено найбільше робіт (див. оглядову статтю [83]). Отже ми маємо наступне еквівалентне переформулювання Наслідку 2.5.

Наслідок 2.6. *Топологічний простір X є C-подібним (відп. менгеровим, скіперзовим, гуревичовим) тоді і лише тоді, коли він є ліндельофовим, і мультипокритий простір $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ є виграшним (відп. менгеровим, скіперзовим, гуревичовим).*

Нехай A є підмножиною декартового добутку $X \times Y$. Надалі ми будемо використовувати наступні позначення: $A^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in A\}$, $A(x) = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$, де $x \in X$. Надалі операцію на абелевих групах позначатимемо через "+".

Лема 2.7. *Нехай X є топологічним простором, для якого $(X, \mathcal{U}(X))$ є ω-обмеженим, і $G \supset X$ є абелевою топологічною групою, для якої кожне неперервне відображення $\phi : X \to \mathbb{R}$ можна продовжити до неперервного гомоморфізму $\tilde{\phi} : G \to \mathbb{R}$. Тоді для кожного $n \in \omega$ відображення $\psi_n : X^n \to G$, де $\psi_n : (x_1, x_2 \dots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \dots + x_n$, є досконалими по відношенню до мультипокриттів $\lambda_{\mathcal{U}(X)^n}$ і $\lambda(G)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільне покриття $u_0 \cdot \dots \cdot u_{n-1} \in \lambda_{\mathcal{U}(X)^n}$ і знайдемо $U \in \mathcal{U}(X)$, для якого рівномірне покриття $u = \{U(x) : x \in X\}$ є верхньою границею сім'ї $\{u_i : i < n\}$ по відношенню до $\prec$. Нехай ρ є неперервною псевдометрикою на X, для якої $\{(x, y) \in X^2 : \rho(x, y) < 1\} \subset U$. Оскільки

$(X, \mathcal{U}(X))$ є ω-обмеженим, метричний простір (X, ρ) є ліндельофовим. Застосовуючи Лему 2.3 до регулярного ліндельофового простору (X, ρ) і покриття $w = \{B_\rho(x, 1) : x \in X\}$, знайдемо неперервну псевдометрику d на X, для якої кожна підмножина $Y \subset X$ скінченного діаметра є w-обмеженою. Зафіксуємо довільне $x_0 \in X$ і розглянемо відображення $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, x_0)$. Тоді $f^{-1}(-r, r)$ є w-обмеженим, і отже u-обмеженим для кожного $r \in \mathbb{R}$. Нехай $\hat{f} : G \to \mathbb{R}$ є неперервним гомоморфізмом, що продовжує f, і O є відкритим околом нейтрального елемента групи G з властивістю $\hat{f}(O) \subset (-1, 1)$.

Зафіксуємо довільну скінченну підмножину K групи G. Твердження леми буде доведеним, як тільки ми покажемо, що $B = \psi_n^{-1}(O + K)$ є w^n-обмеженою. За вибором O існує $r > 0$ з властивістю $\hat{f}(O + K) \subset (-r, r)$. Як наслідок, $B \subset \psi_n^{-1}(\hat{f}^{-1}(-r, r))$. Зауважимо, що $\hat{f} \circ \psi_n(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n)$, тому $0 \le f(x_i) < r$ для кожного $(x_1, \ldots, x_n) \in B$ і $i \le n$, і нарешті B є w^n-обмеженою будучи підмножиною $(f^{-1}(-r, r))^n$. □

Розглянемо селекційні властивості скінченних добутків і зліченних об'єднань мультипокритих просторів. Частковим випадком наступної леми є [29, Th. 7].

Лема 2.8. *Мультипокритий простір (X, λ) є скіперзовим тоді і лише тоді, коли (X^n, λ^n) є менгеровим для кожного $n \in \omega$. Як наслідок, клас скіперзових мультипокритих просторів є замкненим відносно взяття скінченних степенів його елементів.*

Доведення. Припустимо, що (X^n, λ^n) є менгеровим для кожного $n \in \omega$. Щоб довести, що (X, λ) є скіперзовим, зафіксуємо довільну послідовність $(u_n)_{n \in \omega} \in \lambda^\omega$. Для кожного $n \in \omega$ з Менгеровості X^n випливає існування покриття $\{B_{n,k}^n : k \ge n\}$ простору X^n степенями u_k-обмежених підмножин $B_{n,k} \subset X$.

Для кожного $k \in \omega$ покладемо $B_k = \bigcup_{n \le k} B_{n,k}$. Ми стверджуємо, що $\{B_n : n \in \omega\}$ є ω-покриттям простору X. Справді, зафіксуємо довільну скінченну підмножину $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Оскільки сім'я $\{B_{n,k}^n : k \ge n\}$ покриває X^n, $(x_1, \ldots, x_n) \in B_{n,k}^n$ для деякого $k \ge n$, і тому $F \subset B_{n,k} \subset B_k$.

Достатність доведено.

Щоб довести необхідність, припустимо, що мультипокритий простір (X, λ) має властивість Скіперза. Щоб довести, що всі скінченні степені X є менгеровими, зафіксуємо довільне $n \in \omega$ і послідовність покриттів $(w_k)_{k\in\omega} \in \lambda^n$. Для кожного $k \in \omega$ запишемо w_k в формі $w_k = u_{k1} \cdot \ldots \cdot u_{kn}$, де $u_{ki} \in \lambda$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Оскільки мультипокритий простір (X, λ) є центрованим, для кожного $k \in \omega$ існує $u_k \in \lambda$, для якого $u_k \succ u_{ki}$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$. Використовуючи скіперзовість X, знайдемо ω-покриття $\{B_k : k \in \omega\}$ u_k-обмеженими підмножинами $B_k \subset X$. Ми стверджуємо, що $X^n = \bigcup_{k\in\omega} B_k^n$, звідки очевидно випливає менгеровість простору (X^n, λ^n). Справді, зафіксуємо довільне $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ і знайдемо $k \in \omega$ з властивістю $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset B_k$. Тоді $x \in B_k^n$. □

Сім'я $\{A_n : n \in \omega\}$ називається *власним ω-покриттям* множини X, якщо для довільної скінченної підмножини $K \subset X$ множина $\{n \in \omega : K \subset A_n\}$ є нескінченною.

Лема 2.9. *Нехай (X, λ) є скіперзовим мультипокритим простором. Тоді для кожної послідовності $(u_n)_{n\in\omega} \in \lambda^\omega$ існує власне ω-покриття $\{B_n : n \in \omega\}$ множини X u_n-обмеженими підмножинами $B_n \subset X$.*

Доведення. Нехай $(u_n)_{n\in\omega} \in \lambda^\omega$ є послідовністю покриттів X. За властивістю Скіперза простору (X, λ), для кожного $k \in \omega$ існує послідовність $(A_{k,n})_{n\geq k}$ u_n-обмежених підмножин $A_{k,n} \subset X$, для якої сім'я $\{A_{k,n} : n \geq k\}$ є ω-покриттям простору X. Для кожного $n \in \omega$ розглянемо u_n-обмежену підмножину $B_n = \bigcup_{k\leq n} A_{k,n}$ простору X і зауважимо, що $\{B_n : n \in \omega\}$ є власним ω-покриттям X, що і треба було довести. □

Лема 2.10. *Добуток $(X \times Y, \lambda_X \cdot \lambda_Y)$ гуревичевих мультипокритих просторів (X, λ_X) і (Y, λ_Y) є гуревичевим. Як наслідок, клас гуревичевих мультипокритих просторів є замкненим відносно взяття скінченних добутків його елементів.*

Доведення. Зафіксуємо послідовність $(w_n)_{n\in\omega} \in (\lambda_X \cdot \lambda_Y)^\omega$. Для кожного $n \in \omega$ знайдемо $u_n \in \lambda_X$ і $v_n \in \lambda_Y$ для яких $w_n = u_n \cdot v_n$. За означенням властивості Гуревича існують послідовності $(A_n)_{n\in\omega}$ і $(B_n)_{n\in\omega}$ підмножин X і Y відповідно, для яких A_n (B_n) є u_n- $(v_n$-) обмеженою, і сім'ї $\{A_n : n \in \omega\}$ і $\{B_n : n \in \omega\}$ є γ-покриттями X і Y відповідно. Для кожного $n \in \omega$ покладемо $C_n = A_n \times B_n$. Легко перевірити, що сім'я $\{C_n : n \in \omega\}$ є γ-покриттям добутку $X \times Y$, і кожен C_n є w_n-обмеженим, що і треба було довести. □

Лема 2.11. *Нехай A_n, $n \in \omega$, є підпросторами мультипокритого простору (X, λ). Якщо кожен підпростір A_n, $n \in \omega$, є виграшним (відп. менгеровим, гуревичевим), тоді таким є і їхнє об'єднання $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$.*

Доведення. 1. Припустимо, що всі підпростори A_n, $n \in \omega$, є виграшними. Для кожного $n \in \omega$ зафіксуємо виграшну стратегію $\Theta_n : \lambda^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$ другого гравця в грі CB на A_n. Визначимо стратегію $\Theta : \lambda^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$ другого гравця в грі CB на $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, поклавши

$$\Theta(u_0, \dots, u_n) = \bigcup_{k\le n} \Theta_k(u_k, \dots, u_n)$$

для всіх $(u_0, \dots, u_n) \in \lambda^{<\omega}$. З u_n-обмеженості множин $\Theta_k(u_k, \dots, u_n)$, $k \le n$, випливає u_n-обмеженість їхнього об'єднання $\Theta(u_0, \dots, u_n)$.

Покажемо, що $A \subset \bigcup_{n\in\omega} \Theta(u_0, \dots, u_n)$ для кожної послідовності $(u_n)_{n\in\omega} \in \lambda^\omega$. Зафіксуємо довільне $k \in \omega$. Трактуючи послідовність $(u_n)_{n\ge k}$ як ходи першого гравця в грі Менгера на A_k, бачимо, що $A_k \subset \bigcup_{n\ge k} \Theta_k(u_k, \dots, u_n)$ (за вибором Θ_k як виграшної стратегії). Тоді

$$A = \bigcup_{k\in\omega} A_k \subset \bigcup_{k\in\omega} \bigcup_{n\ge k} \Theta_k(u_k, \dots, u_n) = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{k\le n} \Theta_k(u_k, \dots, u_n) = \bigcup_{n\in\omega} \Theta(u_0, \dots, u_n),$$

і отже Θ є виграшною стратегією другого гравця у грі Менгера на $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$.

2. Припустимо, що підпростори A_n, $n \in \omega$, мають властивість Менгера (Гуревича). Щоб довести, що об'єднання $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ має властивість Менгера (Гуревича), зафіксуємо довільну послідовність $(u_n)_{n\in\omega} \in \lambda^\omega$. За менгеровістю (гуревичевістю) A_n, $n \in \omega$, для кожного $k \in \omega$ існує (γ-)покриття $\{B_n^k : n \ge k\}$ множини A_k u_n-обмеженими підмножинами $B_n^k \subset X$. Поклавши

$B_n = \bigcup_{k\le n} B_n^k$, бачимо, що кожна B_n є u_n-обмеженою і $\{B_n : n \in \omega\}$ є (γ-)покриттям множини A. Звідси випливає, що об'єднання $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ має властивість Менгера (Гуревича). □

Що стосується властивості Скіперза, тут ситуація з об'єднаннями є більш тонкою. Як доведено в [34], замкненість класу скіперзових мультипокритих просторів відносно скінченних об'єднань його елементів еквівалентна майже когерентності довільних фільтрів, тобто, іншими словами, теоретико-множинному принципу NCF (відповідні означення можна знайти в [91]).

Лема 2.12. *Нехай X є топологічним простором, і мультипокритий простір $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ є виграшним (відп. гуревичевим, скіперзовим, менгеровим). Тоді таким є добуток $(X\times Y, \lambda_{\mathcal{U}(X\times Y)})$ для кожного σ-компактного простору Y.*

Доведення. Розглянемо довільний σ-компактний простір Y і запишемо його як об'єднання $\cup\{K_n : n \in \omega\}$ зліченної сім'ї компактних підпросторів. Не обмежуючи загальності, $K_n \subset K_{n+1}$ для всіх $n \in \omega$. Позначимо через h_n звуження до $X \times K_n$ проекції $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$. Покажемо, що h_n є досконалим по відношенню до мультипокриттів $\lambda_{\mathcal{U}(X\times Y)}|(X \times K_n)$ і $\lambda_{\mathcal{U}(X)}$ відповідно. Справді, нехай $u \in \lambda_{\mathcal{U}(X\times Y)}$ і d є неперервною псевдометрикою на $X \times Y$, для якої $w = \{B_d(z, 1) : z \in X \times Y\}$ є вписаним в u. Для кожного $n \in \omega$ визначимо функцію $d_n : X^2 \to \mathbb{R}$ поклавши $d_n(x_1, x_2) = \sup\{d((x_1, y), (x_2, y)) : y \in K_n\}$ і зауважимо, що d_n є неперервною псевдометрикою на X. Зафіксуємо довільне $x \in X$. Досконалість h_n випливає з w-обмеженості прообразу $h_n^{-1}(B_{d_n}(x, 1/3))$, яку можна довести стандартними міркуваннями використовуючи компактність K_n і означення d_n.

Застосовуючи Твердження 2.1(7), ми отримуємо, що $(X\times K_n, \lambda_{\mathcal{U}(X\times Y)}|(X\times K_n))$ є виграшним (відп. Гуревичевим, Скіперзовим, Менгеровим) для всіх $n \in \omega$. Тому Лема 2.11 завершує доведення у випадку виграшності, менгеровості, або гуревичевості мультипокритого простору $(X, \mathcal{U}(X))$. Для властивості Скіперза необхідні деякі додаткові міркування. Припустивши, що $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ є скіперзовим, зафіксуємо послідовність $(u_n)_{n\in\omega} \in \lambda^{\omega}_{\mathcal{U}(X\times Y)}$. Для кожного $n \in \omega$ знайдемо $v_n \in \lambda_{\mathcal{U}(X)}$, для якого $h_n^{-1}(B)$ є u_n-обмеженим для всіх v_n-обмежених підмножин B множини X. Тоді з Леми 2.9 випливає існування власного ω-покриття $\{B_n : n \in \omega\}$ множини X для якого кожне B_n є v_n-обмеженим. Залишилось показати, що $\{h_n^{-1}(B_n) : n \in \omega\}$ є власним ω-покриттям добутку $X \times Y$. Для цього зафіксуємо скінченну підмножину $C = \{(x_i, y_i) : i \leq m\} \subset X \times Y$ і знайдемо $n \in \omega$, для якого $\{x_i : i \leq m\} \subset B_n$ і $\{y_i : i \leq m\} \subset K_n$. Тоді $C \subset B_n \times K_n = h_n^{-1}(B_n)$, звідки випливає, що $\{h_n^{-1}(B_n) : n \in \omega\}$ є ω-покриттям добутку $X \times Y$. □

Зауваження 1. Відомо, що при деяких додаткових теоретико-множинних припущеннях існує гуревичів підпростір S простору дійсних чисел $\mathbb{R}$, квадрат якого S^2 не має властивості Менгера, див. [77, Th. 43]. Але це не суперечить Лемам 2.8 і 2.10. Щоб пояснити це, розглянемо деякі топологічні простори X і Y. Тоді топологічний простір $X \times Y$ є менгеровим тоді і лише тоді, коли таким є мультипокритий простір $(X \times Y, \mathcal{O}(X \times Y))$, в той час як добуток мультипокритих просторів $(X, \mathcal{O}(X)) \times (Y, \mathcal{O}(Y))$ є менгеровим тоді і лише тоді, коли таким є мультипокритий простір $(X \times Y, \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(Y))$. Легко бачити, що $\mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{O}(X \times Y)$, і ці мультипокриття співпадають лише у вироджених випадках, тому $(X \times Y, \mathcal{O}(X \times Y))$ і $(X \times Y, \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(Y))$ є різними мультипокритими просторами. У світлі Твердження 2.1(5) цікаво з'ясувати, коли мультипокриття $\mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(Y)$ and $\mathcal{O}(X \times Y)$ є еквівалентними. Безпосередня перевірка показує, що це має місце, коли обидва простори є локально компактними або ліндельофовими P-просторами, але з [77, Th. 43], Твердження 2.1(5), і Леми 2.10 можна зробити висновок, що $\mathcal{O}(S)^2$ не є еквівалентним до $\mathcal{O}(S^2)$. □

Лема 2.13. *Нехай (X, λ) є виграшним мультипокритим простором. Тоді існує виграшна стратегія Θ_1 другого гравця в грі CB, для якої $\{\Theta_1(u_0, \dots, u_n) : n \in \omega\}$ є γ-покриттям множини X для всіх послідовностей $(u_n)_{n\in\omega} \in \lambda^\omega$.*

Доведення. Зафіксуємо довільну виграшну стратегію Θ другого гравця в грі CB на мультипокритому просторі (X, λ). Покажемо від супротивного, що відображення $\Theta_1 : \lambda^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$,

$$\Theta_1 : (u_0, u_1, \dots, u_n) \mapsto \bigcup_{0 \le i_0 \le i_1 \le \dots \le i_k = n} \Theta(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_k}),$$

є виграшною стратегією другого гравця у грі CB на (X, λ) з потрібною нам властивістю. Припустимо, що існує послідовність покриттів $(u_n)_{n\in\omega} \in \lambda^\omega$, деяка підпослідовність $(i_k)_{k\in\omega} \in \omega^\omega$, і $x \in X$ для яких $x \notin \bigcup_{k\in\omega} \Theta_1(u_0, u_1, \dots, u_{i_k})$. Але Θ є виграшною стратегією в грі Менгера на (X, λ), що разом з означенням Θ_1 дає $X = \bigcup_{k\in\omega} \Theta(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) \subset \bigcup_{k\in\omega} \Theta_1(u_0, u_1, \dots, u_{i_k})$, отримано суперечність. □

Наслідок 2.14. *Клас виграшних мультипокритих просторів є замкненим відносно скінченних добутків його елементів.*

Доведення. Нехай (X, λ) і (Y, ν) є виграшними мультипокритими просторами, і Θ_X та Θ_Y є виграшними стратегіями другого гравця з властивістю з Леми 2.13 в грі CB на (X, λ) та (Y, ν) відповідно. Безпосередня перевірка показує, що відображення

$$\Theta : (u_0 \cdot v_0, \dots, u_n \cdot v_n) \mapsto \Theta_X(u_0, \dots, u_n) \times \Theta_Y(v_0, \dots, v_n)$$

є виграшною стратегією другого гравця в грі CB на добутку $(X \times Y, \lambda_X \times \lambda_Y)$. □

Наступний наслідок дає негативну відповідь на [52, Problem 1]. Нещодавно він був незалежно отриманий Л. Бабінкостовою в роботі [28].

Наслідок 2.15. *Добуток скінченного числа сильно o-обмежених топологічних груп є сильно o-обмеженою.*

Доведення. Безпосередньо випливає з зауваження, що топологічна група G є сильно o-обмеженою тоді і лише тоді, коли мультипокритий простір $(G, \lambda_L(G))$ є виграшним, див. Наслідок 2.14 і Твердження 2.1(2,5). □

Наступна лема є центральним результатом цього розділу.

Лема 2.16. *Нехай G є топологічною групою і $X \subset G$ є деякою множиною, що її породжує. Якщо мультипокритий простір $(X \cup X^{-1}, \lambda_R(G)|X \cup X^{-1})$ є виграшним, тоді таким є і мультипокритий простір $(G, \lambda_R(G))$.*

Більш того, якщо G є абелевою і $(X, \lambda(G)|X)$ має властивість Гуревича (Скіперза), тоді цю властивість має мультипокритий простір $(G, \lambda(G))$.

Доведення. 1. Почнемо з доведення "виграшної" частини. Припустивши, що

$$(X \cup X^{-1}, \lambda_R(G)|X \cup X^{-1})$$

є виграшним, знайдемо стратегію $\Theta : \lambda_R^{<\omega} \to \mathcal{P}(G)$, для якої $\{\Theta(u_0, \ldots, u_k) : k \in \omega\}$ є γ-покриттям множини $X \cup X^{-1}$ для кожної послідовності $(u_n)_{n\in\omega} \in \lambda_R^\omega$. Нехай $\mathcal{B}$ є сім'єю всіх відкритих околів нейтрального елемента групи G.

Для кожного $s \in \lambda_R^{<\omega}$ побудуємо допоміжну послідовність $w(s) = (w(s)_n)_{n\in\omega} \in \lambda_R^\omega$. Зафіксуємо довільне $s = (u_0, \ldots, u_m)$ і знайдемо $U \in \mathcal{B}$, для якого $u_m \prec \{Uz : z \in G\}$, і $U_0 \in \mathcal{B}$ з властивістю $U \supset U_0^2$. Покладемо $w(s)_0 = \{U_0 z : z \in G\}$ і $A_0(s) = \Theta(s\hat{\ }w(s)_0)$. Припустимо, що для деякого $n \in \omega$ і для всіх $k \le n$ вже побудовано $w(s)_k = \{U_k z : z \in G\} \in \lambda_R$ і $A_k(s) \subset G$ таким чином, що виконуються наступні умови:

(*i*) $A_k(s) = \Theta(s\hat{\ }w(s)_0\hat{\ }\cdots\hat{\ }w(s)_k)$;

(*ii*) $U_k \supset U_l^2$ для всіх $k < l \le n$;

(*iii*) $A_k(s)B$ є $w(s)_{k-1}$-обмеженою для кожної $w(s)_l$-обмеженої підмножини B групи G, де $k < l \le n$ і $w(s)_{-1} = u_m$.

Оскільки $A_n(s)$ є $\{U_n z : z \in G\}$-обмеженою, існує скінченна підмножина $K \subset G$, для якої $A_n(s) \subset U_n K$. Знайдемо $U_{n+1} \in \mathcal{B}$, для якого $zU_{n+1}z^{-1} \subset U_n$ для всіх $z \in K$ та $U_{n+1}^2 \subset U_n$, і покладемо $w(s)_{n+1} = \{U_{n+1}z : z \in G\}$. Візьмемо довільне $k < n+1$ і $w(s)_{n+1}$-обмежену підмножину B групи G, розглянемо добуток $C = A_k(s)B$. Якщо $k < n$, тоді $w(s)_{k-1}$-обмеженість C випливає з (*iii*) і співвідношення $w(s)_n \prec w(s)_{n+1}$. Отже залишилось розглянути випадок $k = n$. Нехай L є скінченною підмножиною G, для якої $B \subset U_{n+1}L$. Тоді

$$C = A_n(s)B \subset U_n K U_{n+1} L \subset U_n U_n K L \subset U_n^2 K L \subset U_{n-1} K L,$$

звідки випливає $w(s)_{n-1}$-обмеженість множини C, що завершує індуктивну побудову послідовності $(w(s)_n)_{n\in\omega}$, яка задовільняє $(i)-(iii)$ для всіх $n\in\omega$. Зауважимо, що з умови (iii) випливає, що добуток $A_0(s)A_2(s)\cdots A_{2n}(s)$ є $u_m = w(s)_{-1}$-обмеженим для всіх $n\in\omega$.

Для кожного $s=(u_0,\dots,u_{n-1})\in\lambda_R^{<\omega}$ побудуємо скінченну послідовність

$$(q_0(s),\dots,q_{2n-2}(s))\in(\lambda_R^{<\omega})^{<\omega}$$

наступним чином:

$$q_0(s)=(u_0),\ q_{2k+1}(s)=q_{2k}(s)\hat{\ }w(q_{2k}(s))|(2k+1),\ q_{2k+2}(s)=q_{2k+1}(s)\hat{\ }u_{k+1}.$$

Нехай

$$\Theta_1(s)=A_0(q_{2n-2}(s))A_2(q_{2n-2}(s))\cdots A_{2n-2}(q_{2n-2}(s)).$$

Покажемо, що Θ_1 є виграшною стратегією другого грвця у грі CB на (G,λ_R). Справді, з вищесказаного випливає, що $\Theta_1(s)$ є $w_{-1}(q_{2n-2}(s))=u_{n-1}$-обмеженою, а отже Θ_1 є стратегією другого гравця. Щоб показати її виграшність, розглянемо довільний елемент $z=x_0x_1\cdots x_m\in G$, де $x_i\in X\cup X^{-1}$ для всіх $i\le m$. Нехай $t=(u_n)_{n\in\omega}\in\lambda_R^\omega$ є послідовністю покриттів G. Доведення буде завершене, як тільки ми покажемо, що що існує $n\in\omega$, для якого $\Theta_1(t|n)\ni z$. Для цього розглянемо таку послідовність $(v_k)_{k\in\omega}\in\lambda_R^\omega$, що для кожного $n\in\omega$ існує $k_n\in\omega$, для якого $q_{2n-2}(t|n)=(v_0,\dots,v_{k_{n-1}})$ (з означення $q_-(-)$ легко випливає існування такої послідовності, і $k_n=k_{n-1}+(2n-2)+1$). Тоді

$$\Theta_1(t|n)=A_0(q_{2n-2}(t|n))A_2(q_{2n-2}(t|n))\cdots A_{2n-2}(q_{2n-2}(t|n))=$$
$$=\Theta(v_0,..,v_{k_{n-1}})\Theta(v_0,..,v_{k_n},v_{k_{n-1}+1},v_{k_{n-1}+2})\cdots\Theta(v_0,..,v_{k_{n-1}},..,v_{k_{n-1}+2n-2}).$$

За вибором Θ, сім'я $\{\Theta(v_0,\dots,v_k):k\in\omega\}$ є γ-покриттям множини $X\cup X^{-1}$, а отже існує $l\in\omega$, для якого $\{x_0,\dots,x_m\}\subset\Theta(v_0,\dots,v_k)$ для всіх $k\ge l$. Нехай $n>m$ задовільняє умову $k_{n-1}>l$. Тоді $\{x_0,\dots,x_m\}\subset\Theta(v_0,\dots,v_{k_{n-1}},\dots,v_{k_{n-1}+2i})$ для всіх $i\in\{0,2,\dots,2n-2\}$, звідки випливає $z\in\Theta_1(t|n)$.

2. Припустимо, що мультипокритий простір $(X,\lambda(G)|X)$ є скіперзовим, і покладемо $\lambda=\lambda(G)$. Для довільної послідовності $(u_n)_{n\in\omega}\in\lambda^\omega$ знайдемо

послідовність $(O_n)_{n\in\omega}$ відкритих околів нейтрального елемента e з властивостями $u_n \prec \{g+O_n : g\in G\}$, $-O_n = O_n$, і $2O_{n+1}\subset O_n$ для всіх $n\in\omega$. За властивістю Скіперза мультипокритого простору $(X,\lambda|X)$ існує послідовність $(K_n)_{n\in\omega}$ скінченних підмножин групи G, для якої сім'я $v=\{K_n+O_n : n\in\omega\}$ є власним ω-покриттям множини X. Без втрати загальності можемо вважати, що $K_n=-K_n$ і $K_n+K_n\subset K_{n+1}$ для всіх $n\in\omega$. Покажемо, що $v_1=\{K_{2n}+O_n : n\in\omega\}$ є ω-покриттям G.

Спрвді, $K+O_n\supset X$ для кожного $n\in\omega$, де $K=\bigcup_{n\in\omega}K_n$. Для кожного $x\in X$ визначимо неспадну числову послідовність $z(x)$ наступним чином: $z(x)_n=\min\{m\in\omega : x\in K_m+O_n\}$. Оскільки v є власним ω-покриттям множини X, для кожної скінченної підмножини $S\subset X$ множина $I_S=\{n\in\omega : z(x)_n\le n$ для всіх $x\in S\}$ є нескінченною. Тепер розглянемо довільну скінченну підмножину A групи G, і знайдемо скінченну підмножину $S\subset X$ і $m\in\omega$, для яких $A\subset m(S-S)$. Зафіксуємо довільне $l\in I_S\cap[3m,+\infty)$. Тоді

$$S-S\subset K_l+O_l-K_l-O_l\subset K_{l+1}+O_{l-1},$$
$$2(S-S)\subset 2(K_{l+1}+O_{l-1})\subset K_{l+2}+O_{l-2},$$

і так далі. Продовжуючи таким чином, ми отримаємо $A\subset m(S-S)\subset K_{l+m}+O_{l-m}$. Оскільки $l\ge 3m$, то існує $n\in\omega$, для якого $n\le l-m$ і $2n\ge l+m$, звідки випливає $O_n\supset O_{l-m}$ і $K_{2n}\supset K_{l+m}$. Звідси $K_{l+m}+O_{l-m}\subset K_{2n}+O_n$, а отже мультипокритий простір (G,λ) є Скіперзовим.

3. Доведення "гуревичевої" частини є подібним. Нехай λ, $(u_n)_{n\in\omega}\in\lambda^\omega$, і $(O_n)_{n\in\omega}$ є такими, як в попередньому пункті. Оскільки мультипокритий простір $(X,\lambda|X)$ має властивість Гуревича, існує послідовність $(K_n)_{n\in\omega}$ скінченних підмножин G, для якої сім'я $v=\{K_n+O_n : n\in\omega\}$ є γ-покриттям X. Без втрати загальності можемо вважати, що $K_n=-K_n$ і $K_n+K_n\subset K_{n+1}$ для всіх $n\in\omega$. Покажемо, що $v_1=\{K_{2n}+O_n : n\in\omega\}$ є γ-покриттям G. Нехай K і $z(x)\in\omega^{\uparrow\omega}$ є такими, як в попередньому пункті. Оскільки v є γ-покриттям X, для кожної скінченної підмножини $S\subset X$ множина $I_S=\{n\in\omega : z(x)_n\le n$ для всіх $x\in S\}$ є коскінченною, тобто доповнення $\omega\setminus I_S$ є скінченним. Тепер розглянемо довільний елемент $z\in G$ і знайде-

мо скінченну підмножину S множини X і $m \in \omega$, для якого $z \in m(S-S)$. Зафіксуємо довільне $l \geq 3m$ з властивістю $[l,+\infty) \subset I_S$. Тоді для кожного $p \geq l$ маємо $S-S \subset K_p+O_p-K_p-O_p \subset K_{p+1}+O_{p-1}$, $2(S-S) \subset 2(K_{p+1}+O_{p-1}) \subset K_{p+2}+O_{p-2}$, і так далі. Продовжуючи таким чином, ми отримаємо $z \in m(S-S) \subset K_{p+m}+O_{p-m}$. Оскільки $p \geq l \geq 3m$, то $p+m \leq 2(p-m)$, і отже $K_{p+m} \subset K_{2(p-m)}$, звідки випливає $z \in K_{2(p-m)}+O_{p-m}$. Оскільки $p \geq l$ вибрано довільним, то $z \in O_n+K_{2n}$ для всіх $n \geq l-m$, і отже v_1 є γ-покриттям G. □

Зауваження 2. Виграшність довільної абелевої топологічної групи H, що породжується множиною X, можна вивести з виграшності мультипокритого простору $(X,\lambda(H)|X)$ простіше, ніж в загальному (неабелевому) випадку. Розглянемо довільну скінченну послідовність $j=(j_0,\dots,j_{n-1}) \in \{-1,1\}^{<\omega}$ і визначимо відображення $\psi_j : X^n \to G$, поклавши $\psi_j(x_0,\dots,x_{n-1}) = j_0x_0+\dots+j_{n-1}x_{n-1}$. Неважко переконатись, що ψ_j є рівномірно обмеженим по відношенню до мультипокриттів $(\lambda(H)|X)^n$ і $\lambda(H)$ (тут суттєво використовується комутативність), і отже $(\psi_j(X^n),\lambda(H)|\psi_j(X^n))$ є виграшним для кожного $j \in \{-1,1\}^{<\omega}$. Тепер достатньо використати Наслідок 2.14, Твердження 2.1(8), і Лему 2.11.

Ті самі міркування працюють у випадку властивості Гуревича. У випадку властивості Скіперза необхідно додатково довести, що зліченне об'єднання рівномірно обмежених образів скінченних степенів скіперзового простору $(X,\lambda(H)|X)$ є скіперзовим (об'єднання скіперзових просторів може не мати властивості Скіперза, див. обговорення цього питання після Леми 2.11). □

2.3. Властивості Менгера і Скіперза при $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$.

Основним результатом цього підрозділу є Теорема 2.22, в якій стверджується, що властивості Менгера і Скіперза топологічних просторів співпадають за умови $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$, де $\mathfrak{u}$ і $\mathfrak{g}$ є добре відомими малими кардиналами. Цей результат є одним з центральних в статті [93]. Відомо [91], що нерівність

$\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ не суперечить аксіомам ZFC. В поєднанні з існуванням менгерового топологічного простору без властивості Скіперза при гіпотезі континууму (див. [55, Th. 2.8]), це дає незалежність припущення про співпадіння властивостей Менгера і Скіперза від аксіом ZFC.

Нагадаємо означення малих кардиналів $\mathfrak{u}$ і $\mathfrak{g}$ (див. також [91] чи [43]). Під *вільним фільтром* на множині X ми розуміємо сім'ю непорожніх підмножин $\mathcal{F}$ множини X з наступними властивостями:

(1) для довільних $F \in \mathcal{F}$ і $G \,^*\!\supset F$ множина G належить $\mathcal{F}$;

(2) для довільних $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ перетин $F_1 \cap F_2$ належить $\mathcal{F}$.

Тут $A \subset^* B$ означає, що множина $A \setminus B$ є скінченною. Максимальні щодо включення вільні фільтри називаються *вільними ультрафільтрами* на множині X. Початкові відомості про фільтри можна знайти в [9]. Малий кардинал $\mathfrak{u}$ рівний, за означенням, найменшій потужності бази деякого вільного ультрафільтра на множині натуральних чисел ω, де сім'я $\mathcal{B}$ нескінченних підмножин ω називається *базою* ультрафільтра $\mathcal{F}$, якщо кожен елемент $F \in \mathcal{F}$ містить деякий $B \in \mathcal{B}$.

Щодо малого кардинала $\mathfrak{g}$, то оригінальне означення [91] використовує поняття групово-щільної (groupwise dense) сім'ї. Проте його можна також еквівалентно визначити через напівфільтри (див. [93, Obs. 1]), які будуть суттєво використовуватись в цьому підрозділі. Поняття напівфільтра введене в [38] як природнє узагальнення вільних фільтрів з одного боку, і як дуальний об'єкт до групово-щільної сім'ї з іншого боку. Сім'я $\mathcal{F}$ нескінченних підмножин множини X називається *напівфільтром*, якщо вона задовільняє умову (1) з вищенаведеного означення фільтра.

Оскільки кожен напівфільтр $\mathcal{F}$ на зліченній множині C є підмножиною експоненти $\mathcal{P}(C)$, яку можна природньо утотожнити з добутком $\{0,1\}^C$, можна говорити про топологічні властивості напівфільтрів. (Під експонентою $\mathcal{P}(Y)$ множини Y ми розуміємо множину всіх її підмножин.) Нагадаємо, що підпростір Y топологічного простору X є *худим*, якщо він є підмножиною першої категорії Бера в X.

Оскільки C є зліченною, $\mathcal{P}(C)$ і $[C]^{\aleph_0}$ є гомеоморфними копіями просторів Кантора і Бера відповідно, див [58, 7.4, 7.7]. (Тут і надалі через $[X]^{\aleph_0}$ позначено сім'ю всіх зліченних підмножин множини X.) Наприклад, база топології простору $\mathcal{P}(C)$ складається з підмножин вигляду $G(s,t) = \{A \in [C]^{\aleph_0} : A \cap s = t\}$, де s і t є скінченними підмножинами C. Малий кардинал $\mathfrak{g}$ рівний, за означенням, найменшій потужності сім'ї F нехудих напівфільтрів на зліченній множині C з худим перетином $\cap\mathsf{F}$. Під фільтром Фреше $\mathfrak{Fr}(C)$ на множині C ми розуміємо фільтр $\mathfrak{Fr}(C) = \{D \subset C : |C \setminus D| < \aleph_0\}$.

Також в доведеннях ми використовуватимемо багатозначні відображення. Під *багатозначним відображенням* Φ з множини X в множину Y ми розуміємо відображення з X в $\mathcal{P}(Y)$, і на письмі позначаємо це $\Phi : X \Rightarrow Y$. Для підмножини A множини X покладемо $\Phi(A) = \bigcup_{x \in A} \Phi(x) \subset Y$. Коли множини X і Y наділені деякими топологіями, цікаво розглядати багатозначні відображення з певними топологічними властивостями. Багатозначне відображення Φ між топологічними просторами X і Y називається

- *компактнозначним*, якщо $\Phi(x)$ є компактним для всіх $x \in X$;
- *напівнеперервним зверху*, якщо для кожної відкритої підмножини V простору Y множина $\Phi^{-1}_{\subset}(V) = \{x \in X : \Phi(x) \subset V\}$ є відкритою в X.

Лема 2.17. *Нехай $\Phi : X \Rightarrow Y$ є компактнозначним напівнеперервним зверху відображенням між топологічними просторами X і Y, для якого $\Phi(X) = Y$. Якщо X має властивість Менгера (Гуревича), тоді цю властивість має також простір Y.*

Доведення. Зафіксуємо довільну послідовність $(w_n)_{n \in \omega}$ відкритих покриттів простору Y. Для кожного $n \in \omega$ розглянемо сім'ю $u_n = \{\Phi^{-1}_{\subset}(\cup v) : v$ є скінченною підмножиною $w_n\}$. Оскільки Φ є напівнеперервним зверху і компактнозначним, кожне u_n є відкритим покриттям простору X. З властивості Менгера простору X випливає існування послідовності $(c_n)_{n \in \omega}$, де c_n є скінченною підмножиною u_n, для якої $\{\cup c_n : n \in \omega\}$ є (γ-) покриттям X. З означення u_n випливає, що для кожного $n \in \omega$ можна знайти скінченну підмножину $v_n \subset w_n$ з властивістю $\Phi(\cup c_n) \subset \cup v_n$. Звідси випливає, що $\{\cup v_n : n \in \omega\}$ є (γ-) покриттям простору Y, і, отже, Y має властивість Менгера (Гуревича). □

Нехай u є сім'єю підмножин множини X і $x \in X$. Введемо наступне позначення $I(x,u) = \{U \in u : x \in U\}$. Зауважимо, що u є покриттям множини X тоді і лише тоді, коли $I(x,u)$ є непорожньою для кожного $x \in X$. Якщо ж $I(x,u)$ є нескінченною для кожного $x \in X$, то будемо називати u *∞-покриттям* множини X. Для довільного ∞-покриття u множини X позначимо через $\mathcal{U}(u)$ найменший напівфільтр на множині u, який містить сім'ю $\{I(x,u) : x \in X\}$. Напівфільтр $U(u)$ можна виписати явно:

$$U(u) = \bigcup_{v \in [u]^{<\aleph_0}} \bigcup_{x \in X} \uparrow_v I(x,u),$$

де через $[u]^{<\aleph_0}$ позначено сім'ю всіх скінченних підмножин u, і для підмножин A і B деякої множини Z через $\uparrow_A B$ позначено сім'ю $\{C \subset Z : C \supset B \setminus A\}$. Коли $A = \emptyset$, ми писатимемо $\uparrow$ замість $\uparrow_A$. Також коли u є зрозумілим з контексту, ми будемо писати $I(x)$ замість $I(x,u)$.

Лема 2.18. *Нехай X є топологічним простором, і u є сім'єю відкритих підмножин простору X. Тоді багатозначне відображення $\Phi : X \Rightarrow \mathcal{P}(u)$, $\Phi : x \mapsto \uparrow I(x)$, є компактнозначним і напівнеперервним зверху.*

Доведення. Оскільки $\Phi(x) = \uparrow I(x)$ є замкненою підмножиною компактного простору $\mathcal{P}(u)$, Φ є компактнозначним. Покажемо, що Φ є напівнеперервним зверху. Для цього розглянемо довільну точку $x \in X$ і відкриту підмножину G простору $\mathcal{P}(u)$, яка містить $\Phi(x)$. Для кожного $v \in \Phi(x)$ знайдемо $s_v \in [u]^{<\aleph_0}$, для якого $G(s_v, s_v \cap v) \subset G$. Оскільки $\Phi(x)$ є компактним, ми можемо знайти скінченну сім'ю $\mathbf{v} \subset \Phi(x)$ з властивістю

$$\Phi(x) \subset \bigcup \{G(s_v, s_v \cap v) : v \in \mathbf{v}\}.$$

Покладемо $s = \cup\{s_v : v \in \mathbf{v}\}$, $c = s \cap I(x)$, і $U = \cap c$. Очевидно, що $x \in U$ і U є відкритою в X. Таким чином напівнеперервність зверху відображення Φ буде доведено, як тільки ми покажемо співвідношення $\Phi(U) \subset G$. Для цього зафіксуємо довільний $x_1 \in U$ і зауважимо, що $I(x_1) \cap s \supset c = I(x) \cap s$, тому

$$\Phi(x_1) \subset \bigcup\{G(s, v \cap s) : v \in \Phi(x)\} = G,$$

і отже $\Phi(U) \subset G$. □

Наслідок 2.19. *Нехай X є топологічним простором з властивістю Менгера, і u є зліченним ∞-покриттям простору X. Тоді напівфільтр $\mathcal{U}(u)$ має властивість Менгера.*

Доведення. Зафіксуємо довільне $v \in [u]^{<\aleph_0}$ і розглянемо багатозначне відображення $\Phi_v : X \Rightarrow \mathcal{P}(u)$, $\Phi_v : x \mapsto \uparrow_v I(x, u)$. Зауважимо, що Φ_v є композицією $\Psi_2 \circ \Psi_1$, де $\Psi_1 : X \Rightarrow \mathcal{P}(u \backslash v)$, $\Psi_1 : x \mapsto \uparrow I(x, u \backslash v)$, і $\Psi_2 : \mathcal{P}(u \backslash v) \Rightarrow \mathcal{P}(u)$, $\Psi_2 : w \mapsto \uparrow w$. Неважко помітити, що Ψ_2 є компактнозначним напівнеперервним зверху, в той час, як Ψ_1 є таким за Лемою 2.18. З Леми 2.17 випливає, що $\bigcup_{x \in X} \uparrow_v I(x, u) = \Phi_v(X)$ має властивість Менгера. Оскільки властивість Менгера зберігається зліченними об'єднаннями, напівфільтр $\mathcal{U}(u) = \bigcup_{v \in [u]^{<\aleph_0}} \Phi_v(X)$ має властивість Менгера. □

Альтернативне доведення наступного твердження, яке використовує відому характеризаю Талагранда напівфільтрів, що є множинами першої категорії, можна знайти в [90, Lem. 6].

Твердження 2.20. *Нехай $\mathcal{F}$ є напівфільтром на ω. Якщо доповнення $[\omega]^{\aleph_0} \setminus \mathcal{F}$ є множиною першої категорії Бера в $[\omega]^{\aleph_0}$, тоді $\mathcal{F}$ не має властивості Менгера.*

Доведення. Припустимо, що $[\omega]^{\aleph_0} \setminus \mathcal{F}$ є підмножиною першої категорії Бера в просторі $[\omega]^{\aleph_0}$. Тоді $\mathcal{F}$ містить всюди щільну G_δ-підмножину $G \subset \mathcal{F}$ у просторі $[\omega]^{\aleph_0}$. Згідно з [58, Th. 21.23], простір $[\omega]^{\aleph_0}$ гомеоморфний до простору ірраціональних чисел $\mathbb{N}^\omega$. Таким чином G є аналітичною (=неперервним метризовним образом повного метричного сепарабельного простору) і не σ-компактною підмножиною $[\omega]^{\aleph_0}$, і тому містить замкнену в $[\omega]^{\aleph_0}$ гомеоморфну копію D простору $[\omega]^{\aleph_0}$, див. [58, Th. 29.3]. Очевидно, що простір $[\omega]^{\aleph_0}$ не має властивості Менгера (див., наприклад, [7]). Оскільки властивість

Менгера успадковується замкненими підпросторами, напівфільтр $\mathcal{F}$ не має властивості Менгера також. $\square$

Ми також будемо використовуват наступний безпосередній наслідок з одного результату К. Лефлейма.

Теорема 2.21. *([43, Theorem 9.22]) Нехай C є зліченною множиною, і $\mathcal{F}$ є напівфільтром на C. Якщо доповнення до $\mathcal{F}$ не є множиною першої категорії Бера в $[C]^{\aleph_0}$ і виконується нерівність $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$, тоді існує послідовність $(K_n)_{n\in\omega}$ попарно неперетинних скінченних підмножин C, для якої множина*

$$\mathcal{U} = \{\{n \in \omega : F \cap K_n \neq \emptyset\} : F \in \mathcal{F}\}$$

є фільтром на ω.

Теорема 2.22. *При $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ кожний менгерів топологічний простір має властивість Скіперза.*

Доведення. Нехай $(u_n)_{n\in\omega}$ є послідовністю відкритих покриттів простору X, і u_{n+1} є вписаним в u_n для всіх $n \in \omega$. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що жоден з членів цієї послідовності не містить скінченного підпокриття. Оскільки X має властивість Менгера, існує послідовність $(v_n)_{n\in\omega}$, для якої кожне v_n є скінченною підмножиною u_n і $w_1 = \{\cup v_n : n \in \omega\}$ є ∞-покриттям простору X, див. [76, Fig. 2]. Збільшуючи v_n, якщо потрібно, ми можемо додатково вимагати, щоб $\cup v_n \neq \cup v_m$ для довільних $m \neq n$. Застосовуючи Наслідок 2.19 та Твердження 2.20, ми отримуємо, що доповнення до $\mathcal{U}(w_1)$ в $[w_1]^{\aleph_0}$ не є множиною першої категорії Бера.

Тоді за Теоремою 2.21 існує послідовність $(K_n)_{n\in\omega}$ скінченних підмножин w_1, для якої

$$\mathcal{F} = \{\{n \in \omega : A \cap K_n \neq \emptyset\} : A \in \mathcal{U}(w_1)\}$$

є фільтром на ω. Зауважимо, що для довільної біекції $\sigma : \omega \to \omega$ послідовність $(K_{\sigma(n)})_{n\in\omega}$ володіє тією самою властивістю. Для кожного $n \in \omega$ знайдемо скінченну підмножину $L_n \subset \omega$, для якої $K_n = \{\cup v_m : m \in L_n\}$. За вибором v_n, сім'я $\{L_n : n \in \omega\}$ є диз'юнктною, і тому не обмежуючи загальності можемо вважати, що $\min L_n \geq n$.

Покладемо

$$B_n = \cup K_n = \bigcup_{m \in L_n} \cup v_m$$

і покажемо, що $\{B_n : n \in \omega\}$ є ω-покриттям простору X, причому B_n є u_n-обмеженою. u_n-Обмеженість множини B_n випливає з того, що $\min L_n \geq n$ і вписаності u_{m+1} в u_m для всіх $m \in \omega$. Щоб показати, що $\{B_n : n \in \omega\}$ є ω-покриттям простору X, зафіксуємо довільну скінченну підмножину $C \subset X$ і знайдемо $n \in \omega$, для якого $I(x, w_1) \cap K_n \neq \emptyset$ для всіх $x \in C$ (таке n існує з означення фільтра). Тоді, очевидно, $C \subset \cup K_n = B_n$, що і треба було довести. $\square$

2.4. Доведення основних результатів.

Вільний об'єкт над X в категорії всіх (локально опуклих) лінійних топологічних просторів позначатимемо через $L_s(X)$ (відп. $L(X)$). Топологія простору $L_s(X)$ є найсильнішою лінійною топологією, яка індукує вихідну топологію на $X \subset L_s(X)$.

Слідуючи [15], позначимо через νX і μX поповнення за Хьюітом і Дьєдоне простору X. Нагадаємо з [15, § 3.11], що *поповненням за Хьюітом* топологічного простору X називається простір Y з наступними властивостями:

- X є всюди щільним підпростором Y;
- для кожної неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ існує продовження $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$.

Поповненням за Дьєдоне топологічного простору X називається поповнення Y простору X стосовно універсальної рівномірності $\mathcal{U}(X)$. Тепер ми можемо навести характеризацію o-обмеженості вільних абелевих топологічних груп. Надалі кожний лінійний топологічний простір $(X, +, \cdot)$ розглядатимемо з мультипокриттям, що породжується рівномірною структурою топологічної групи $(X, +)$.

Теорема 2.23. *Для топологічного простору X наступні умови еквівалентні:*

(1) *$A(X)$ є о-обмеженою;*

(2) *$A(X)^n$ є о-обмеженою для всіх $n \in \omega$;*

(3) *$L_p(X)$ є о-обмеженим;*

(4) *$L(X)$ є о-обмеженим;*

(5) *$L_s(X)^n$ є о-обмеженим для всіх $n \in \omega$;*

(6) *кожний неперервний метризовний образ простору X має властивість Скіперза;*

(7) *$A(\nu X)$ є о-обмеженою;*

(8) *$A(\mu X)$ є о-обмеженою;*

(9) *мультипокритий простір $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ має властивість Скіперза.*

Доведення. Імплікація (2) $\Rightarrow$ (1) є очевидною. Імплікації (5) $\Rightarrow$ (4) і (4) $\Rightarrow$ (3) випливають з неперервності лінійних відображень $\varphi : L_s(X) \to L(X)$ та $\psi : L(X) \to L_p(X)$, які продовжують id_X, і простого факту, що o-обмеженість зберігається неперервними гомоморфними образами, див. [84].

Для завершення доведення достатньо довести наступні імплікації: (1) $\Rightarrow$ (9), (9) $\Rightarrow$ (2), (9) $\Rightarrow$ (5), (3) $\Rightarrow$ (9), (6) $\Leftrightarrow$ (9), (7) $\Leftrightarrow$ (1), (8) $\Leftrightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (9). Оскільки $A(X)$ є o-обмеженою, вона є ω-обмеженою, а тому рівномірний простір $(X, \mathcal{U}(X))$ разом з мультипокритим простором $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ є ω-обмеженими за Твердженням 2.2. Тому X і $G = A(X)$ задовольняють умови Леми 2.7, а отже для кожного $n \in \omega$ відображення ψ_n визначене в цій лемі є досконалим по відношенню до $\lambda^n_{\mathcal{U}(X)}$ і $\lambda(A(X))$. Як вже було зазначено, o-обмеженість групи $A(X)$ еквівалентна до властивості Менгера мультипокритого простору $(A(X), \lambda(A(X)))$. Використовуючи Твердження 2.1(7), ми отримуємо, що $(X^n, \lambda^n_{\mathcal{U}(X)})$ є менгеровим для всіх $n \in \omega$, і отже $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ має властивість Скіперза за Лемою 2.8.

(9) $\Rightarrow$ (2). Припустимо, що $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ має властивість Скіперза. Тоді її має мультипокритий простір $(X, \lambda(A(X))|X)$. Застосовуючи Лему 2.16, ми

отримуємо, що $(A(X), \lambda(A(X)))$ має також властивість Скіперза, і таким чином $(A(X)^n, \lambda(A(X))^n)$ має властивість Менгера для всіх $n \in \omega$ за Лемою 2.8, що означає o-обмеженість $A(X)^n$ для всіх $n \in \omega$.

(9) $\Rightarrow$ (5). Зазначимо, що вже доведено еквівалентність умов (1), (2), (9). Нехай X є топологічним простором з властивістю (9). Тоді $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ має властивість Скіперза, і тому її має мультипокритий простір $(X\times\mathbb{R}, \lambda_{\mathcal{U}(X\times\mathbb{R})})$ за Лемою 2.12. Як наслідок, $A(X\times\mathbb{R})^n$ є o-обмеженою для всіх $n \in \omega$. Розглянемо відображення $h : X\times\mathbb{R} \to L_s(X)$, $h(x, r) = rx$. Оскільки $L_s(X)$ є лінійним топологічним простором, h є неперервним, і отже може бути продовженим до неперервного гомоморфізму $\tilde{h} : A(X\times\mathbb{R}) \to L_s(X)$. Неважко переконатись, що $\tilde{h}$ є сюр'єктивним. Тому $L_s(X)$ є неперервним гомоморфним образом $A(X\times\mathbb{R})$, і отже $L_s(X)^n$ є неперервним гомоморфним образом $A(X\times\mathbb{R})^n$ для всіх $n \in \omega$.

(3) $\Rightarrow$ (9). Достатньо використати факт, що X і $G = L_p(X)$ задовільняють умови Леми 2.7, див. [8, Розд. 0], і застосувати ті самі міркування, що і при доведенні імплікації (1) $\Rightarrow$ (9).

(9) $\Leftrightarrow$ (6). Припустивши, що $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ має властивість Скіперза, зафіксуємо неперервне сюр'єктивне відображення $f : X \to Y$ на метризовний простір Y. Тоді f є рівномірно обмеженим по відношенню до мультипокриттів $\lambda_{\mathcal{U}(X)}$ і $\lambda_{\mathcal{U}(Y)}$ будучи рівномірно неперервним по відношенню до рівномірностей $\mathcal{U}(X)$ і $\mathcal{U}(Y)$. Тому $(Y, \lambda_{\mathcal{U}(Y)})$ має властивість Скіперза за Твердженням 2.1(8). Зокрема, звідси випливає, що Y є ліндельофовим, і отже $\lambda_{\mathcal{U}(Y)}$ є еквівалентним до $\mathcal{O}(Y)$ за Наслідком 2.4. Отже мультипокритий простір $(Y, \mathcal{O}(Y))$ має властивість Скіперза за Твердженням 2.1(5).

Тепер припустимо, що $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ не має властивості Скіперза, і знайдемо послідовність $(u_n)_{n\in\omega} \in \lambda^\omega_{\mathcal{U}(X)}$, яка на це вказує. Для кожного n знайдемо елемент $U_n \in \mathcal{U}(X)$, для якого $w_n = \{U_n(x) : x \in X\}$ є вписаним в u_n. Нехай d неперервною псевдометрикою на X, для якої $v_n = \{B_d(x, 2^{-n}) : x \in X\}$ є вписаним в w_n. Тоді тотожнє відображення id_X є досконалим по відношенню до мультипокриттів $\lambda_1 = \{u_n : n \in \omega\}$ і $\lambda_2 = \{v_n : n \in \omega\}$ множини X. Оскільки (X, λ_1) не має властивості Скіперза, мультипокритий простір

(X, λ_2) також не має властивості Скіперза за Твердженням 2.1(7). Тому X з топологією породженою d не має властивості Скіперза, а отже існують не скіперзові метризовні образи простору X.

(7) $\Leftrightarrow$ (1). Зазначимо, що вже доведено еквівалентність (1) $\Leftrightarrow$ (6). Відомо, що кожний ліндельофовий простір є повним за Хьюітом, і кожне неперервне відображення $f : X \to Y$ з простору X в повний за Хьюітом простір Y продовжується до неперервного відображення $\hat{f} : \nu X \to Y$, див. [15, 3.11.12, 3.11.16]. Нехай X є таким, що $A(X)$ є o-обмеженою, і Y є неперервним метризовним образом νX при деякому відображенні f. Тоді Y є ліндельофовим як метричний простір, що містить всюди щільний ліндельофовий (навіть скіперзовий) підпростір $Z = f(X)$. Тому Y разом з Z є повними за Хьюітом, і отже відображення $f|X$ продовжується до неперервного відображення $g : \nu X \to Z$. Оскільки f і g співпадають на на всюди щільній підмножині X простору νX, $f = g$, і отже $Y = Z = f(X)$. Таким чином ми показали, що кожний неперервний метризовний образ простору νX має властивість Скіперза, звідки випливає o-обмеженість групи $A(\nu X)$.

Тепер припустимо, що $A(\nu X)$ є o-обмеженою. Тоді кожен метризовний образ простору νX має властивість Скіперза. З тих самих міркувань, що і в попередньому параграфі, випливає, шо кожен метризовний образ простору X також має властивість Скіперза, і тому $A(X)$ є o-обмеженою.

(8) $\Leftrightarrow$ (1). Відомо [15, 8.5.8(b)], що існують природні вкладення просторів νX та μX в βX для яких $X \subset \mu X \subset \nu X \subset \beta X$. Це дозволяє нам застосувати ті самі міркування, що і в доведенні еквівалентності умов (1) і (7) і зробити висновок, що X і μX мають однакові метризовні образи, і тоді застосувати вже доведену еквівалентність (1) $\Leftrightarrow$ (6). $\square$

Теорема 2.24. *Для топологічного простору X наступні умови еквівалентні:*

(1) $(F(X), \lambda_{L \wedge R})$ *є виграшним;*

(2) $F(X)$ *є сильно o-обмеженою;*

(3) $(F(X)^n, \lambda^n_{L\vee R})$ *є виграшним для всіх* $n \in \omega$*;*

(4) $A(X)$ *є сильно* o*-обмеженою;*

(5) $L_p(X)$ *є сильно* o*-обмеженим;*

(6) $L(X)$ *є сильно* o*-обмеженим;*

(7) $L_s(X)^n$ *є сильно* o*-обмеженою для всіх* $n \in \omega$*;*

(8) $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ *є виграшним.*

Доведення. Частина доведення цієї теореми проходить абсолютно аналогічно до доведення Теореми 2.23. А саме, імплікації (4) $\Rightarrow$ (8), (8) $\Rightarrow$ (2), (4) $\Rightarrow$ (7), і (5) $\Rightarrow$ (8) можна довести по аналогії до імплікацій (1) $\Rightarrow$ (9), (9) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (5), (3) $\Rightarrow$ (9) Теореми 2.23 відповідно (слід тільки додатково використати той факт, що добуток виграшних мультипокритих просторів є виграшним, і якщо $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ є виграшним, то виграшним є і мультипокритий простір $(X \cup X^{-1}, \lambda_R(X \cup X^{-1}))$ за Лемою 2.11).

Імплікації (3) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (1), (7) $\Rightarrow$ (6), і (6) $\Rightarrow$ (5) безпосередньо випливають з відповідних означень. Таким чином залишається довести імплікації (1) $\Rightarrow$ (4) і (2) $\Rightarrow$ (3). Стосовно імплікації (1) $\Rightarrow$ (4), вона випливає з Твердження 2.1(8) і факту, що гомоморфізм $f : F(X) \to A(X)$, який продовжує тотожнє відображення на X, є рівномірно неперервним по відношенню до рівномірностей $\mathcal{U}_{L\wedge R}(F(X))$ і $\mathcal{U}(A(X))$, а отже є рівномірно обмеженим по відношеннюдо мультипокриттів $\lambda_{L\wedge R}(F(X))$ і $\lambda(A(X))$ груп $F(X)$ і $A(X)$ відповідно.

(2) $\Rightarrow$ (3). Зауважимо, що в силу Наслідку 2.14 достатньо показати, що мультипокритий простір $(F(X), \lambda_{L\vee R})$ є виграшним. Покладемо $\Delta_{F(X)} = \{(x,x) : x \in F(X)\}$. Тоді відображення $i : X \ni x \mapsto (x,x) \in \Delta_{F(X)}$ разом зі своїм оберненим є, очевидно, досконалими по відношенню до мультипокриттів $\lambda_{L\vee R}$ і $\lambda_L \times \lambda_R|\Delta_{F(X)}$ множин $F(X)$ і $\Delta_{F(X)}$ відповідно. Оскільки $F(X)$ є сильно o-обмеженою, обидва мультипокриті простори $(F(X), \lambda_R)$ і $(F(X), \lambda_L)$ є виграшними, і отже таким є добуток $(F(X)^2, \lambda_R \times \lambda_L)$, і нарешті

мультипокриті простори $(\Delta_{F(X)}, \lambda_R \times \lambda_L | \Delta_{F(X)})$ і $(F(X), \lambda_{L\vee R})$ є виграшними також. $\square$

Властивість Гуревича є самодуальною.

Теорема 2.25. *Для простору X наступні властивості еквівалентні:*

(1) $(A(X), \lambda(A(X)))$ *має властивість Гуревича;*

(2) $(A(X)^n, \lambda(A(X))^n)$ *має властивість Гуревича для всіх $n \in \omega$;*

(3) $(L_p(X), \lambda(L_p(X)))$ *має властивість Гуревича;*

(4) $(L(X), \lambda(L(X)))$ *має властивість Гуревича;*

(5) $L_s(X)^n$ *має властивість Гуревича для всіх $n \in \omega$;*

(6) *кожен неперервний метризовний образ простору X має властивість Гуревича;*

(7) $(A(X), \lambda(A(\nu X)))$ *має властивість Гуревича;*

(8) $(A(X), \lambda(A(\mu X)))$ *має властивість Гуревича;*

(9) $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ *має властивість Гуревича.*

Доведення. Доведення цієї теореми є цілком аналогічним до доведення Теореми 2.23. $\square$

Еквівалентні умови Теореми 2.24 не зберігаються скінченними добутками. Нехай X є зліченно компактним простором, для якого існує така неперервна псевдометрика ρ на X^2, що простір (X^2, ρ) не є ліндельофовим, див. Приклад 2.26. Тоді рівномірний простір $(X, \mathcal{U}(X))$, а також мультипокритий простір $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ є цілком обмеженими, а тому $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ є виграшним. Але рівномірний простір $(X^2, \mathcal{U}(X^2))$, очевидно, не є ω-обмеженим, як наслідок мультипокритий простір $(X^2, \lambda_{\mathcal{U}(X^2)})$ не є ω-обмеженим, а отже X^2 не задовільняє умовам Теореми 2.24.

Приклад 2.26. *Існує зліченно компактний простір Z і псевдометрика d на Z^2, для якої псевдометричний простір (Z^2, d) не є ліндельофовим.*

Доведення. Достатньо побудувати два зліченно компактних простори X, Y і псевдометрику $d : (X \times Y)^2 \to \mathbb{R}$ на їхньому добутку $X \times Y$, для якої відповідний псевдометричний простір не є ліндельофовим, і тоді на топологічній сумі Z просторів X і Y очевидно існує потрібна псевдометрика $d : Z^2 \to \mathbb{R}$. Нехай D є дискретним простором потужності $|D| = \aleph_1$. Подібно до [15, Пр. 3.10.19] зафіксуємо деяку функцію f, що ставить у відповідність кожній зліченній підмножині $A \subset \beta D$ деякий елемент $f(A) \in \overline{A} \setminus A$. Нехай $X_0 = D$ і

$$X_\alpha = (\bigcup_{\gamma<\alpha} X_\gamma) \cup f([\bigcup_{\gamma<\alpha} X_\gamma]^{\aleph_0})$$

для $0 < \alpha < \omega_1$, де $[A]^{\aleph_0}$ позначає сім'ю всіх зліченних підмножин множини A. Таким чином ми визначили трансфінітну послідовність $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ підмножин βD. Простір $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ є зліченно компактним (кожна зліченна підмножина A простору X міститься в деякому X_α, і отже не є замкненою в X). Неважко помітити, що $|X| \le \mathfrak{c}$. Покладемо $Y = D \cup (\beta D \setminus X)$. За [15, 3.6.14], $|\overline{A}| = 2^{\mathfrak{c}}$ для кожної зліченної $A \subset \beta D$, і отже Y є також зліченно компактним. Залишилось зауважити, що $X \times Y$ містить відкритий дискретний підпростір $\Delta_D = \{(x, x) : x \in D\}$ потужності $\aleph_1$, і отже на $X \times Y$ існує неліндельофова псевдометрика $d : (X \times Y)^2 \to \mathbb{R}$. □

Оскільки ліндельофовість є l-інваріантною [92] (див. також [44], де доведено l-інваріантність числа Ліндельофа), і властивості мультипокритого простору $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$, які фігурують в Наслідку 2.6 мають відповідники серед серед властивостей $L_p(X)$, ми отримуємо наступний

Наслідок 2.27. *Властивості Скіперза, Гуревича і C-подібності є l-інваріантними (а отже A- і M-інваріантними). Як наслідок, властивість Менгера є l-інваріантною при $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$, будучи еквівалентною до властивості Скіперза.*

Як доведено в Теоремах 2.23 і 2.25, властивості Скіперза і Гуревича мультипокритого простору $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ допускають характеризацію в термінах метризовних образів простору X. Через це виникає припущення, що має місце подібна характеризація виграшності простору $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$: $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ є виграшним тоді і лише тоді, коли кожний метризовний образ простору X має деяку "сильну" властивість P. Але навіть зліченність не підходить в ролі цієї властивості P.

Нагадаємо, що топологічний простір X є *P-простором*, якщо кожна G_δ-підмножина цього простору є відкритою. Р. Тельгарський в роботі [81] зауважив, що ліндельофовий P-простір Y, побудований Р. Полем в [70], не є C-подібним (і отже мультиокритий простір $(X, \lambda_{\mathcal{U}(X)})$ не є виграшним за Наслідком 2.6). Залишається зазначити, що потужність довільного метризовного образу P-простору X не перевищує число Ліндельофа цього простору.

Наслідок 2.28. *Простір Поля Y має наступні властивості:*

(1) *Групи $F(Y)$, $A(Y)$, $L_p(Y)$, $L(X)$, і $L_s(X)$ є OF-недетермінованими;*

(2) *довільні метризовні образи просторів Y^n, $F(Y)$, $A(Y)$ є зліченними, де $n \in \omega$.*

Доведення. Другий пункт безпосередньо випливає з того, що кожен скінченний степінь ліндельофового P-простору є ліндельофовим P-простором, і кожний метризовний образ ліндельофового P-простору є зліченним. Що стосується першого пункту, він випливає з Наслідку 2.30 і зауваження, що кожен ліндельофовий P-простір має властивість Гуревича. □

Наслідок 2.28 тісно пов'язаний з результатом А. Кравчика і Г. Міхалєвського [59], які використали простір Поля Y для побудови OF-недетермінованої P-групи G. Подібні ідеї також використовувалися в [52, Th. 3.1].

Наступне твердження є безпосереднім наслідком з [55, Th. 27].

Твердження 2.29. *Нехай G є топологічною групою, топологічний простір якої має властивість Менгера. Тоді перший гравець не має виграшної стратегії у грі OF на групі G.*

Твердження 2.29 у поєднанні з Теоремами 2.23, 2.25 і 2.24 дозволяє будувати приклади OF-недетермінованих груп.

Наслідок 2.30. *Нехай X є не σ-компактним метризовним простором, всі степені якого мають властивість Менгера (Гуревича). Тоді всі степені топологічних груп $F(X)$, $A(X)$, $L_p(X)$, $L(X)$, і $L_s(X)$ є OF-недетермінованими, будучи не сильно o-обмеженими групами, всі степені яких мають властивість Менгера (Гуревича) як топологічні простори.*

Доведення. Нехай X є не σ-компактним метризовним простором, всі степені якого є гуревичевими (менгеровими), і G є однією з груп $F(X)$, $A(X)$, $L_p(X)$, $L(X)$, $L_s(X)$. Оскільки G є зліченним об'єднанням неперервних образів скінченних степенів $Y = X \times \mathbb{R}$ (див. доведення Теореми 2.23, де показано, що $L_s(X)$ є неперервним образом $A(X \times \mathbb{R})$), такими ж є групи G^n для всіх $n \in \omega$. Застосовуючи Лему 2.12 і Наслідок 2.4, ми отримуємо, що всі скінченні степені топологічного простору G є гуревичевими (менгеровими). Оскільки властивість Гуревича (Менгера) зберігається неперервними образами і зліченними об'єднаннями згідно з Лемою 2.11 (це також було зауважено в [55]), топологічний простір G^n має властивість Гуревича (Менгера) для всіх $n \in \omega$. Застосовуючи Твердження 2.29, ми отримуємо, що для кожного $n \in \omega$ перший гравець не має виграшної стратегії у грі OF на топологічній групі G^n.

Р. Тельгарським доведено, кожний виграшний (=C-подібний) метризовний топологічний простір є σ-компактним, див. [75]. Тому X не є виграшним, а отже G не є сильно o-обмеженою за Теоремою 2.24. Звідси G^n не є сильно o-обмеженою для всіх $n \in \omega$. Звідси випливає, що G^n є OF-недетермінованою для всіх $n \in \omega$. □

Простори X з таким властивостями, як в Наслідку 2.30, побудовані в [40], [45], і [89].

Нарешті зазначимо, що не існує метризовної топологічної групи з такими властивостями, як в Наслідку 2.30.

Твердження 2.31. *Кожна метризовна топологічна група, топологічний простір якої є гуревичевим, є сильно o-обмеженою.*

Доведення. Нехай G є топологічною групою, топологічний простір якої має властивість Гуревича, і $\{U_n : n \in \omega\}$ зліченною базою околів нейтрального елемента групи G. Покладемо $u_n = \{gU_n : g \in G\}$. З властивості Гуревича групи G випливає існування послідовності $(F_n)_{n\in\omega}$ скінченних підмножин G для якої $G = \bigcup_{n\in\omega}\bigcap_{k\geq n} F_nU_n$. Отже G є сильно o-обмеженою будучи, зліченним об'єднанням своїх цілком обмежених підмножин. $\square$

2.5. Висновки.

В цьому розділі ми характеризуємо різноманітні властивості типу обмеженості вільної (абелевої) топологічної групи $F(X)$ $(A(X))$, а також вільного локально-опуклого лінійного топологічного простору $L(X)$ в термінах властивостей тихонівського простору X. Ці властивості є близькими до так званих селекційних принципів, що дозволяє нам довести, що (існують моделі ZFC в яких) властивості Гуревича (Менгера) є l-інваріантними. Це дає метод побудови OF-недетерміновних топологічних груп з сильними комбінаторними властивостями.

РОЗДІЛ 3

Продовження топології з абелевої топологічної групи на її подільну оболонку.

3.1. Огляд літератури.

Дані дослідження беруть свій початок в функціональному аналізі, де Т.О. Банахом, А. Плічком і А. Загороднюком розв'язок однієї проблеми про автоматичну неперервність поліноміальних операторів (див. [69]) був зведений до наступного питання: *Чи правда, що кожна метризовна сепарабельна абелева топологічна група без кручення є підгрупою метризовної сепарабельної* ***подільної*** *абелевої топологічної групи без кручення?*

Надалі ми розглядатимемо тільки абелеві групи. Нагадаємо, що група G є *подільною* (відп. *без кручення*), якщо для довільного елемента $a \in G$ і натурального n рівняння $nx = a$ має розв'язок $x \in G$ (відп. не має більше одного розв'язку в G). За теоремою Бера [24, 21.1] кожна подільна група G є *ін'єктивною* в тому розумінні, що кожен гомоморфізм $h : B \to G$, визначений на підгрупі B групи A, можна продовжити до гомоморфізму $\bar{h} : A \to G$. Класичним результатом теорії абелевих груп [24, 24.1] є факт, що кожна абелева група (без кручення) є підгрупою подільної групи (без кручення). Цей результат дозволяє нам звести вищенаведене питання до наступного: *Чи можна довільну сепарабельну групову топологію на підгрупі H групи G продовжити до сепарабельної групової топології на групі G?*

Інший класичний результат в теорії топологічних груп стверджує, що кожна групова топологія породжена сім'єю неперервних псевдонорм, див. [84, §2]. Це зауваження дозволяє звести проблему продовження групових топологій до проблеми продовження псевдонорм. Слідуючи [84], під *(неперервною) псевдонормою* на (топологічній) групі G ми розуміємо (неперервну) невід'ємну функцію $|\cdot| : G \to [0,\infty)$ для якої $|0| = 0$ і $|x - y| \leq |x| + |y|$ для всіх $x, y \in G$. Псевдонорма $|\cdot|$ є *нормою*, якщо з рівності $|x| = 0$ випливає $x = 0$. Кожна псевдонорма $|\cdot|$ на групі G породжує групову топологію на G, база околів нейтрального елемента якої складається з ε-куль $B_{|\cdot|}(\varepsilon) = \{x \in G : |x| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Група G наділена цією топологією є топологічною групою, яку надалі позначатимемо $(G, |\cdot|)$.

При доведенні існування продовження псевдонорми з потрібними нам властивостями ми використовуватимемо метод застосований М.І. Граєвим в [11] при побудові вільних топологічних груп.

3.2. Основні результати розділу.

Для топологічного простору X через $d(X)$ позначимо його *щільність*, тобто найменшу потужність всюди щільної підмножини X. Відомо, що щільність співпадає з вагою для кожного (псевдо)метризовного топологічного простору.

Наступна теорема є основним результатом розділу.

Теорема 3.1. *Кожну псевдонорму $|\cdot|_H$, визначену на підгрупі H абелевої групи G, можна продовжити до псевдонорми $|\cdot|_G$ на G з властивістю $d(H, |\cdot|_H) = d(G, |\cdot|_G)$.*

Оскільки доведення носить технічний характер, перед його наведенням сформулюємо декілька наслідків.

За [84, 4.1], $w(G) = \chi(G) \cdot ib(G)$ для довільної топологічної групи G, де через $ib(G)$, $w(G)$ і $\chi(G)$ позначено індекс обмеженості групи G, її вагу і характер відповідно (їхні означення можна знайти в підрозділі 1.4 або в [84, §3]). Нагадаємо, що топологічні групи G з $ib(G) \leq \aleph_0$ називаються ω-*обмеженими*, див. [13] або [84]. Відомо, що метризовна топологічна група є ω-обмеженою тоді і лише тоді, коли вона є сепарабельною. На відміну від сепарабельних груп, клас ω-обмежених груп є замкненим відносно багатьох операцій, зокрема взяття підгруп і тихонівських добутків, див. [84] або [13].

Беручи до уваги, що $|X| \leq 2^{w(X)}$ для кожного гаусдорфового топологічного простору X [15, 1.5.1] і $w(G) = \chi(G) \cdot ib(G)$ для кожної топологічної групи G, отримуємо нерівність $|G| \leq 2^{\chi(G)}$, яка справедлива для кожної гаусдорфової ω-обмеженої топологічної групи G. Цю нерівність можна переписати у вигляді $\chi(G) \geq \log|G|$, де $\log \kappa = \min\{\tau : k \leq 2^\tau\}$ для довільного кардинала κ.

Теорема 3.2. *Довільну гаусдорфову групову топологію τ_H визначену на підгрупі H абелевої групи G можна продовжити до гаусдорфової групової топології τ_G на групі G, для якої*

$$ib(G, \tau_G) = ib(H, \tau_H),\ \chi(G, \tau_G) = \max\{\chi(H, \tau_H), \log|G|\},\ і$$
$$w(G, \tau_G) = \max\{w(H, \tau_H), \log|G|\}.$$

З Теореми 3.2 безпосередньо випливає наступний наслідок, де через $\mathfrak{c}$ позначено потужність континууму.

Наслідок 3.3. *Довільну сепарабельну метризовну топологію на підгрупі H абелевої групи G потужності $|G| \leq \mathfrak{c}$ можна продовжити до сепарабельної метризовної топлогії на G.*

Зауважимо, що якщо не вимагати сепарабельності від топології на G, то відповідне доведення є тривіальним: досить розглянути топологію на G, в якій H є відкритою підгрупою G. Проте якщо фактор-група G/H є незліченною, таке продовження приводить до несепарабельної топології на G. Отже потрібно застосовувати деякий інший, менш тривіальний підхід.

Наступний наслідок випливає з Теореми 3.2 і [24, Теор. 24.1], в якій стверджується, що кожна абелева група H (без кручення) є підгрупою подільної абелевої групи G (без кручення) потужності $|G| = |H|$.

Наслідок 3.4. *Кожна гаусдорфова абелева топологічна група H (без кручення) є підгрупою гаусдорфової абелевої подільної топологічної групи G (без кручення) з властивостями $w(G) = w(H)$, $\chi(G) = \chi(H)$, і $ib(G) = ib(H)$.*

Наступний частковий випадок попереднього наслідку дає позитивну відповідь на питання сформульоване на початку розділу.

Наслідок 3.5. *Кожна сепарабельна метризовна абелева група H (без кручення) є підгрупою сепарабельної метризовної абелевої подільної групи G (без кручення).*

3.3. Допоміжні леми.

У доведенні Теореми 3.1 ми використовуватимемо одну комбінаторну лему. Сім'я $\mathcal{A}$ підмножин множини X називається *k-рівномірною,* де $k \in \omega$, якщо $|A| = k$ для всіх $A \in \mathcal{A}$; $\mathcal{A}$ є *диз'юнктною*, якщо вона складається з попарно неперетинних множин.

Лема 3.6. *Нехай $k \in \omega$ і $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – диз'юнктні k-рівномірні скінченні сім'ї підмножин множини X. Тоді існує підмножина $I \subset X$ з властивістю $|I \cap C| = 1$ для кожного $C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.*

Доведення. Легко побудувати k-рівномірні диз'юнктні скінченні сім'ї $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ множин з властивостями $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$, $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}|$, і $\cup\mathcal{C} = \cup\mathcal{D}$. Позначимо $n = |\mathcal{C}| = |\mathcal{D}|$ і запишемо $\mathcal{C}$ і $\mathcal{D}$ у вигляді $\{C_1, \dots, C_n\}$, $\{D_1, \dots, D_n\}$ відповідно. Розглянемо матрицю $[a_{ij}]_{i,j=1}^n$, де $a_{ij} = \frac{1}{k}|C_i \cap D_j|$, і зауважимо, що вона є *подвійно-стохастичною*, тобто $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ для всіх $i, j \in \{1, \dots, n\}$. За теоремою Бірхофа (див. [42], [10, ст. 556], або [26, 8.40]) кожна подвійно-стохастична матриця є опуклою комбінацією матриць вигляду $[\delta_{i,\sigma(j)}]_{i,j=1}^n$, де σ є перестановкою множини $\{1, \dots, n\}$, і $[\delta_{ij}]_{i,j=1}^n$ є одиничною матрицею. З цього результату випливає існування перестановки σ множини $\{1, \dots, n\}$ для якої $a_{i,\sigma(i)} > 0$ для всіх i. Це означає, що перетин $C_i \cap D_{\sigma(i)}$ є непорожнім, а отже містить деяку точку x_i. Покладемо $I = X \cap \{x_1, \dots, x_n\}$ і зауважимо, що $|C \cap I| = 1$ для довільного елемента $C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. □

Теорему 3.1 буде доведено по індукції, крок якої базується на наступній лемі.

Лема 3.7. *Нехай H є підгрупою групи G, для якої $pG \subset H$ для деякого простого числа p. Тоді довільну псевдонорму $|\cdot|_H$ на H можна продовжити до псевдонорми $|\cdot|_G$ на групі G з властивістю $d(G, |\cdot|_G) = d(H, |\cdot|_H)$.*

Доведення. Фактор-група G/H має просту експоненту p, а тому має базу, яка може бути записана у вигляді $\{g^\alpha + H : \alpha < \mu\}$ для деякого ординала μ, див. [24, 16.4]. З міркувань зручності доповнимо цю базу, поклавши $g^\mu = 0$. Тоді кожен елемент групи G можна подати у вигляді $x = u + \sum_{i\in\omega} g^{\alpha_i}$, де $u \in H$ і множина $\{i \in \omega : \alpha_i \neq \mu\}$ є скінченною. Для довільного елемента $x \in G$ покладемо

$$\mathrm{Rep}(x) = \{(u, (\alpha_i)_{i\in\omega}) \in H \times [0, \mu]^\omega : x = u + \sum_{i\in\omega} g^{\alpha_i}\}.$$

Зауважимо, що для довільного $x \in H$ і $(u, (\alpha_i)_{i\in\omega}) \in \mathrm{Rep}(x)$ число p ділить потужність множини $\{i \in \omega : \alpha_i = \alpha\}$ для кожного ординала $\alpha < \mu$.

Позначимо через $|\cdot|_H$ довільну псевдонорму на H. Визначимо функцію $\rho : G \times G \to [0, \infty)$ наступним чином:

$$\begin{gathered}\rho(x, y) = \inf\{|u - v|_H + \sum_{i\in\omega} |pg^{\alpha_i} - pg^{\beta_i}|_H : \\ (u, (\alpha_i)_{i\in\omega}) \in \mathrm{Rep}(x), (v, (\beta_i)_{i\in\omega}) \in \mathrm{Rep}(y)\}\end{gathered}$$

для $x, y \in G$.

Легко бачити, що ρ є інваріантною псевдометрикою на G. Покажемо, що $d(G, \rho) \le d(H, |\cdot|_H)$. Зафіксуємо деяку всюди щільну підмножину D простору $(H, |\cdot|_H)$ потужності $|D| = d(H, |\cdot|_H)$, і підмножину $I \subset [0, \mu]$ потужності $|I| \le d(H, |\cdot|_H)$, для якої $I \ni \mu$ і множина $\{pg^\alpha : \alpha \in I\}$ є всюди щільною в підпросторі $\{pg^\alpha : \alpha < \mu\}$ простору $(H, |\cdot|_H)$. Тоді множина $E = \{x \in G : \mathrm{Rep}(x) \cap (D \times I^\omega) \neq \emptyset\}$ є всюди щільною підмножиною (G, ρ) з властивістю $|E| \le d(H, |\cdot|_H)$. Звідси випливає нерівність $d(G, \rho) \le d(H, |\cdot|_H)$.

Залишилось довести, що $\rho(x, y) = |x - y|_H$ для всіх $x, y \in H$. Зафіксуємо довільні $(u, (\alpha_i)_{i\in\omega}) \in \mathrm{Rep}(x)$, $(v, (\beta_i)_{i\in\omega}) \in \mathrm{Rep}(y)$. Для кожного $\alpha < \mu$ нехай

$A(\alpha) = \{i \in \omega : \alpha_i = \alpha\}$ і $B(\alpha) = \{i \in \omega : \beta_i = \alpha\}$. Оскільки $x, y \in H$, число p ділить потужності множин $A(\alpha)$ та $B(\alpha)$ для всіх ординалів $\alpha < \mu$. Застосувавши Лему 3.6, знайдемо підмножину $I \subset \omega$, для якої $|C \cap I| = \frac{1}{p}|C|$ для кожної непорожньої підмножини $C \in \{A(\alpha), B(\alpha) : \alpha < \mu\}$. Тоді

$$x = u + \sum_{i\in\omega} g^{\alpha_i} = u + \sum_{\alpha<\mu} |A(\alpha)| \cdot g^{\alpha} = u + \sum_{\alpha<\mu} p|I \cap A(\alpha)|\, g^{\alpha} =$$
$$= u + \sum_{\alpha<\mu} \sum_{i\in I\cap A(\alpha)} pg^{\alpha_i} = u + \sum_{i\in I} pg^{\alpha_i}.$$

По аналогії, $y = v + \sum_{i\in I} pg^{\beta_i}$. Отже

$$|u-v|_H + \sum_{i\in\omega} |pg^{\alpha_i} - pg^{\beta_i}|_H \geq |u-v|_H + \sum_{i\in I} |pg^{\alpha_i} - pg^{\beta_i}|_H \geq$$
$$\geq |(u + \sum_{i\in I} pg^{\alpha_i}) - (v + \sum_{i\in I} pg^{\beta_i})|_H = |x-y|_H$$

Переходячи до інфінуму, отримуємо $\rho(x, y) \geq |x-y|_H$. Доведення зворотньої нерівності є очевидним, тому $\rho(x, y) = |x - y|_H$. Поклавши $|x|_G = \rho(x, 0)$ для довільного $x \in G$, ми визначимо псевдонорму на G, яка продовжує псевдонорму $|\cdot|_H$, причому $d(G, |\cdot|_G) = d(H, |\cdot|_H)$. □

Лема 3.8. *Нехай H є підгрупою групи G, для якої фактор-група G/H є періодичною. Тоді довільна псевдонорма $|\cdot|_H$ на H може бути продовжена до псевдонорми $|\cdot|_G$ на G з властивістю $d(G, |\cdot|_G) = d(H, |\cdot|_H)$.*

Доведення. Нехай $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ – така послідовність простих чисел, в якій кожне просте число p трапляється нескінченне число разів, тобто множина $\{i \in \omega : p_i = p\}$ є нескінченною. Позначимо $H_0 = H$ і для кожного $i \geq 0$ покладемо $H_{i+1} = \frac{1}{p_{i+1}} H_i = \{x \in G : p_{i+1}x \in H_i\}$. З періодичності фактор-групи G/H отримуємо $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$.

Зафіксуємо довільну псевдонорму $|\cdot|_H$ на H і всюди щільну підмножину D_0 топологічної групи $(H, |\cdot|_H)$ потужності $|D_0| = d(H, |\cdot|_H)$. Нехай $|\cdot|_0 = |\cdot|_H$. Використовуючи попередню лему, по індукції для кожного $i \geq 1$ знайдемо псевдонорму $|\cdot|_i$ на групі H_i і всюди щільну підмножину D_i топологічної групи $(H_i, |\cdot|_i)$, для якої $|x|_i = |x|_{i-1}$ для кожного $x \in H_{i-1}$ і $|D_i| = |D_{i-1}|$.

Визначимо псевдонорму $|\cdot|_G$ на групі G, поклавши $|x|_G = |x|_i$, де $x \in H_i$. Легко бачити, що $|\cdot|_G$ продовжує $|\cdot|_H$, і $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ є всюди щільною підмножиною топологічної групи $(G, |\cdot|_G)$ потужності $|D| = |D_0| = d(H, |\cdot|_H)$. Звідси випливає рівність $d(G, |\cdot|_G) \le d(H, |\cdot|_H)$. $\square$

3.4. Доведення основних результатів розділу.

Доведення Теореми 3.1. Нехай H є підгрупою групи G і $|\cdot|_H$ є псевдонормою на H. Згідно з [24, 24.1], група H є підгрупою подільної групи E. Більш того, за [24, 24.3] можемо припускати, що фактор-група E/H є періодичною. Застосовуючи попередню лему, продовжимо псевдонорму $|\cdot|_H$ до псевдонорми $|\cdot|_E$ на E таким чином, що $d(E, |\cdot|_E) = d(H, |\cdot|_H)$. За теоремою Бера [24, 21.1], кожна подільна група є ін'єктивною. Тому існує груповий гомоморфізм $h : G \to E$, який продовжує тотожнє відображення $H \to H \subset E$. Визначимо псевдонорму $|\cdot|_G$ на G, поклавши $|x|_G = |h(x)|_E$ для $x \in G$, і зауважимо, що $|\cdot|_G$ продовжує $|\cdot|_H$ і $d(H, |\cdot|_H) \le d(G, |\cdot|_G) \le d(E, |\cdot|_E) = d(H, |\cdot|_H)$. $\square$

Доведення Теореми 3.2. Нехай H є підгрупою групи G і τ_H є гаусдорфовою груповою топологією на H.

Спочатку визначимо гаусдорфову групову топологію $\tau_{G/H}$ на фактор-групі G/H, для якої $ib(G/H, \tau_{G/H}) \le \omega$ і $\chi(G/H, \tau_{G/H}) \le \log|G/H|$. За [24, 24.1], G/H є підгрупою подільної групи E потужності $|E| = |G/H|$. Застосовуючи [24, Теор. 23.1] (про структуру подільних груп), можна довести, що E є ізоморфною підгрупі степеня $\mathbb{T}^\kappa$ кола $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, де $\kappa = \log|G/H| \le \log|G|$. Зауважимо, що $\mathbb{T}^\kappa$ з топологією тихонівського добутку є компактною топологічною групою з властивостями $ib(\mathbb{T}^\kappa) = \omega$ і $\chi(\mathbb{T}^\kappa) = \kappa \le \log|G|$.

Як наслідок, фактор-група G/H, будучи ізоморфною до підгрупи $\mathbb{T}^\kappa$, допускає гаусдорфову групову топологію $\tau_{G/H}$, для якої $ib(G/H, \tau_{G/H}) \le \omega$ і $\chi(G/H, \tau_{G/H}) \le \kappa \le \log|G|$.

Зафіксуємо базу околів $\mathcal{B}$ потужності $|\mathcal{B}| = \chi(H, \tau_H)$ нейтрального елемента топологічної групи (H, τ_H). Застосовуючи [84, 2.3], для кожного $U \in \mathcal{B}$ знайдемо неперервну псевдонорму $|\cdot|_U$ на H для якої $\{x \in H : |x|_U < 1\} \subset U$. За Теоремою 3.1, псевдонорму $|\cdot|_U$ можна продовжити до псевдонорми $\|\cdot\|_U$ на G з властивістю $d(G, \|\cdot\|_U) = d(H, |\cdot|_U)$. З неперервності тотожнього відображення $(H, \tau_H) \to (H, |\cdot|_U)$ випливає, що $ib(H, |\cdot|_H) \le ib(H, \tau_H)$, див. [84, 3.2]. Оскільки щільність та індекс обмеженості співпадають для (псевдо)метризовних топологічних груп [84, §3], ми отримуємо, що $ib(G, \|\cdot\|_U) = d(G, \|\cdot\|_U) = d(H, |\cdot|_U) = ib(H, |\cdot|_U) \le ib(H, \tau_H)$.

Позначимо через τ_G найслабшу з усіх групових топологій на G, в якій фактор-відображення $(G, \tau_G) \to (G/H, \tau_{G/H})$ і тотожнє відображення $(G, \tau) \to (G, \|\cdot\|_U)$ є неперервним для всіх $U \in \mathcal{B}$. Легко бачити, що τ_G є гаусдорфовою груповою топологією на G, яка індукує топологію τ_H на підгрупі H.

Зауважимо, що топологічну групу (G, τ_G) можна ототожнити з підгрупою добутку $G/H \times \prod_{U \in \mathcal{B}} (G, \|\cdot\|_U)$ топологічних груп, індекси обмеженості яких не перевищують $ib(H, \tau_H)$, і характери яких не перевищують $\log|G|$. Згідно з [84, 3.2], індекс обмеженості такого добутку не перевищує $ib(H, \tau_H)$, а його характер не перевищує $\chi(G/H) \cdot |\mathcal{B}| \le \log|G| \cdot \chi(H, \tau_H)$. Як наслідок $ib(G, \tau_G) \le ib(H, \tau_H)$, $\chi(G, \tau_G) \le \chi(H, \tau_H) \cdot \log|G|$, і

$$w(G, \tau_G) = \chi(G, \tau_G) \cdot ib(G, \tau_G) \le \log|G| \cdot \chi(H, \tau_H) \cdot ib(H, \tau_H) = w(H, \tau_H) \cdot \log|G|.$$

$\square$

3.5. Дескриптивна структура подільних груп з продовженою топологією.

Власне кажучи, побудова такої подільної групи $G \supset H$, як в Наслідку 3.5, суттєво використовує аксіому вибору (див. Зауваження 3.11). Як наслідок, група G має невизначену дескриптивну структуру. Ми покажемо, що, взагалі кажучи, група G не є аналітичною навіть якщо H є польською. Нагадаємо, що топологічний простір є *аналітичним*, якщо він є метризовним неперервним образом польського простору. Під *польським простором* ми стандартно розуміємо простір гомеоморфний до сепарабельного повного метричного простору. Топологічна група є *польською* (*аналітичною*), якщо її топологічний простір є польським (аналітичним).

Добре відома теорема про відкрите відображення для банахових просторів узагальнюється на топологічні групи наступним чином: *кожний неперервний груповий гомоморфізм, який діє з аналітичної групи на польську групу, є відкритим.* Доведення цієї теореми про відкрите відображення випливає з [58, Th. 9.10], де стверджується, що довільний гомоморфізм $h : G \to H$ з польської топологічної групи G в ω-обмежену групу H є неперервним, якщо h має властивість Бера, і [58, Th. 29.5], де стверджується, що кожний аналітичний підпрстір польського простору має властивість Бера. Нагадаємо, що підмножина A топологічного простору X має *властивість Бера*, якщо A містить G_δ-підмножину G простору X для якої $A \setminus G$ є множиною першої категорії Бера в X.

Для групи H без кручення і натурального n покладемо $nH = \{ny : y \in H\} \subset H$, і позначимо через $\frac{1}{n} : nH \to H$ відображення, яке ставить у відповідність елементу $x \in nH$ єдиний $y \in H$ для якого $ny = x$.

Твердження 3.9. *Якщо польська група H є підгрупою подільної аналітичної групи G без кручення, тоді для кожного натурального n відображення $\frac{1}{n} : nH \to H$ є неперервним.*

Доведення. Підгрупа H, будучи повною, є замкненою в G. Тоді підгрупа $\frac{1}{n}H = \{g \in G : ng \in H\}$, будучи прообразом H при неперервному відображенні $n : G \to G$, $n : x \mapsto nx$, є замкненою підмножиною G, і тому є аналітичною. Оскільки група G є подільною і без кручення, відображення $n : \frac{1}{n}H \to H$, $n : x \to nx$, є бієктивним неперервним груповим гомоморфізмом з аналітичної групи $\frac{1}{n}H$ на польську групу H. Застосовуючи теорему про відкрите відображення для топологічних груп, ми отримуємо, що це відображення є топологічним ізоморфізмом, а тому відображення $\frac{1}{n} : H \to \frac{1}{n}H$ є неперервним. Оскільки $nH \subset H$, відображення

$\frac{1}{n} : nH \to H$ є також неперервним. □

Нарешті побудуємо приклад польської групи без кручення, для якої не існує вкладення в подільну аналітичну групу без кручення.

Приклад 3.10. *Існує польська група H без кручення, для якої відображення $\frac{1}{2} : 2H \to H$ є розривним. Ця група H не може бути підгрупою подільної аналітичної групи без кручення.*

Доведення. Для кожного $k \in \omega$ позначимо через H_k копію групи $\mathbb{R}$ дійсних чисел і покладемо $e_k = 1 \in H_k$. Наділимо групу H_k нормою

$$|x|_k = \sqrt{(\cos(\pi x) - 1)^2 + \sin^2(\pi x) + (2^{-(k+1)}x)^2}$$

(яка породжується звичайною евклідовою відстанню при відповідному намотуванні $H_k = \mathbb{R}$ на циліндр в $\mathbb{R}^3$). Неважко переконатися, що $|e_k|_k > 2$, в той час, як $|2e_k|_k = 2^{-k}$.

На прямій сумі $\oplus_{k\in\omega} H_k$ розглянемо норму $|(x_k)_{k\in\omega}| = \sum_{i\in\omega} |x_k|_k$ і позначимо через H поповнення групи $\oplus_{k\in\omega} H_k$ по відношенню до цієї норми. Тоді H є польською групою. Покажемо, що H є групою без кручення.

Розглянемо вкладення $i : \oplus_{k\in\omega} H_k \to \prod_{k\in\omega} H_k$ з прямої суми в добуток з тихонівською топологією. Зауважимо, що цей добуток є повною групою. Щоб показати, що група H не має кручення, достатньо перевірити, що продовження $\bar{i} : H \to \prod_{k\in\omega} H_k$ гомоморфізму i на поповнення H є ін'єктивним.

Надалі нам буде зручно мислити елементи груп $\oplus_{k\in\omega} H_k$ і $\prod_{k\in\omega} H_k$ як функції $f : \omega \to \bigcup_{k\in\omega} H_k$.

Припускаючи, що гомоморфізм $\bar{i}$ не є ін'єктивним, можемо знайти $f_\infty \in H$, для якого $f_\infty \neq 0$, але $\bar{i}(f_\infty) = 0$. Зафіксуємо довільне $0 < \varepsilon < |f_\infty|$. Виберемо послідовність $(f_n)_{n\in\omega} \in \oplus_{k\in\omega} H_k$ збіжну до f_∞ в H. Ми можемо вважати, що $|f_n| > \varepsilon$ для кожного $n \in \omega$. За неперервністю i, ми отримуємо, що послідовність $\{i(f_n)\}_{n\in\omega}$ збігається до нуля в $\prod_{k\in\omega} H_k$ (це означає, що послідовність функцій (f_n) є поточково збіжною до нуля). Оскільки послідовність (f_n) є фундаментальною в H, існує $m \in \omega$ для якого $|f_m - f_j| < \frac{\varepsilon}{2}$ для довільного $j \geq m$. Нехай $M \in \mathbb{N}$ є таким, що $f_m(k) = 0$ для всіх $k > M$.

Оскільки для кожного k $\lim_{j\to\infty} f_j(k)=0$, існує $j>M$ настільки велике, що $|f_j(k)|_k<\frac{\varepsilon}{2M}$ для всіх $k\le M$. Тоді

$$|f_m-f_j|=\sum_{k=1}^{\infty}|f_m(k)-f_j(k)|_k\ge\sum_{k=1}^{M}|f_m(k)-f_j(k)|_k\ge$$
$$\ge\sum_{k=1}^{M}|f_m(k)|_k-\sum_{k=1}^{M}|f_j(k)|_k\ge|f_m|-\sum_{k=1}^{M}\frac{\varepsilon}{2M}>\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2},$$

що суперечить $|f_m-f_j|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Тому гомоморфізм $\bar{i}$ є ін'єктивним, і група H є групою без кручення. Оскільки $|e_k|=|e_k|_k>2$ і $|2e_k|=|2e_k|_k=2^{-k}$ для всіх k, ми бачимо, що послідовність $(2e_k)$ збігається до нуля в H, в той час, як (e_k)–ні. Це означає, що відображення $\frac{1}{2}:2H\to H$ є розривним. $\square$

Зауваження 3.11. Наслідок 3.5 не можна довести без використання аксіоми вибору, бо він невірний при аксіомі детермінованості (надалі AD). Ця аксіома суперечить аксіомі вибору, проте має своїм наслідком її слабшу форму, а саме аксіому зліченного вибору, див. [56, §9.2 і §9.3]. Відомо, що при AD довільна підмножина польського простору має властивість Бера, див. [58, 8.35]. З цього факту і [58, Th. 9.10] випливає, що при аксіомі детермінованості теорема про відкрите відображення виконується в наступній, більш сильній формі: довільний неперервний гомоморфізм $h:H\to G$ з ω-обмеженої групи H на польську групу G є відкритим. Використовуючи цю сильнішу форму теореми про відкрите відображення і повторюючи доведення Твердження 3.9, ми отримаємо, що при аксіомі детермінованості це твердження справедливе без припущення, що група G є аналітичною. Таким чином ми приходимо до досить неочікуваного висновку: *При AD групу H з Прикладу 3.10 не можна вкласти в метричну сепаребельну подільну групу без кручення, незважаючи на те, що алгебраїчно H є підгрупою зліченного добутку $\mathbb{R}^\omega$ прямих.* Це показує, що Наслідок 3.5 невірний при аксіомі детермінованості.

3.6. Висновки.

Кожну псевдонорму $|\cdot|_H$ визначену на підгрупі H абелевої групи G можна продовжити до псевдонорми $|\cdot|_G$ на G для якої щільності псевдометричних топологічних груп $(H, |\cdot|_H)$ і $(G, |\cdot|_G)$ співпадають. Звідси ми отримуємо, що кожну гаусдорфову ω-обмежену групову топологію на H можна продожити до гаусдорфової ω-обмеженої групової топології на G. З цього результату, зокрема, випливає, що кожна сепарабельна метризовна абелева група H є підгрупою сепарабельної метризовної **подільної** абелевої групи G. В доведенні цього результату суттєво використовується аксіома вибору, бо він не залишається вірним при аксіомі детермінованості, яка суперечить аксіомі вибору, але має своїм наслідком зліченний варіант аксіоми вибору.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В першому розділі введено три нових локальних кардинальних інваріанти топологічних просторів, а саме sb-характер, cs-характер і cs*-характер, і досліджено їхні базові властивості.

Подібні поняття вже виникали в топологічній літературі: (секвенціальний T_1-) простір має зліченний sb-характер тоді і лише тоді коли він є універсально csf-зліченним в сенсі [61] (тоді і лише тоді, коли він задовільняє слабу першу аксіому зліченності введену Архангельським в [1], тоді і лише тоді, коли він є o-метризовним за Нєдєвим [20]). Топологічний простір має зліченний cs-характер тоді і лише тоді, коли він є csf-зліченним згідно з [61].

Для секвенціальних топологічних груп зліченність cs-характеру є еквівалентною до того, що топологічний простір групи є $\mathcal{M}_\omega$-простором, що дає узагальнення результату М.М. Чобана і С.Й. Нєдева [19].

У вищенаведеній характеризації $\mathcal{M}_\omega$-груп суттєвою є наявність деякої групової структури пов'язаної з топологією. Зокрема вона невірна для топологічно однорідних просторів.

В другому розділі ми характеризуємо різноманітні властивості типу обмеженості вільної (абелевої) топологічної групи $F(X)$ $(A(X))$, а також вільного локально-опуклого лінійного топологічного простору $L(X)$ в термінах властивостей тихонівського простору X. Ці властивості є близькими до так званих селекційних принципів, що дозволяє нам довести, що (існують моделі ZFC в яких) властивості Гуревича (Менгера) є l-інваріантними. Це дає метод побудови OF-недетерміновних топологічних груп з сильними комбінаторними властивостями.

В третьому розділі показано, що кожну псевдонорму $|\cdot|_H$ визначену на підгрупі H абелевої групи G можна продовжити до псевдонорми $|\cdot|_G$ на G, для якої щільності псевдометричних топологічних груп $(H,|\cdot|_H)$ і $(G,|\cdot|_G)$

збігаються. Звідси ми отримуємо, що кожну гаусдорфову ω-обмежену групову топологію на H можна продожити до гаусдорфової ω-обмеженої групової топології на G. З цього результату, зокрема, випливає, що кожна сепарабельна метризовна абелева група H є підгрупою сепарабельної метризовної **подільної** абелевої групи G. В доведенні цього результату суттєво використовується аксіома вибору, бо він не залишається вірним при аксіомі детермінованості, яка суперечить аксіомі вибору, але має своїм наслідком зліченний варіант аксіоми вибору.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *А. В. Архангельский.* Отображения и пространства// Успехи Мат. Наук.–1966.–Т.21, вып.4.–С.133–184.

2. *А. В. Архангельский.* Об отображениях, связанных с топологическими группами// ДАН СССР.–1968.–Т.181, N6.–С.1303–1306.

3. *А. В. Архангельский.* Спектр частот топологического пространства и классификация пространств// ДАН СССР.–1972.–Т.206, N2.–С.265–268.

4. *А. В. Архангельский.* Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты// Успехи Мат. Наук.–1978.–Т.33, вып.6.–С.29–84.

5. *А. В. Архангельский.* О соотношениях между инвариантами топологических групп и их подпространств// Успехи Мат. Наук.–1980.–Т.35, вып.3.– С.3–22.

6. *А. В. Архангельский.* Спектр частот топологического пространства и операция произведения// Тр. Моск. матем. об-ва.–1979.–Т.40.–С.171–206.

7. *А. В. Архангельский.* Пространства Гуревича, аналитические множества и веерная теснота пространств функций// ДАН СССР.–1986.–Т.287, N3.–С.525-528.

8. *А. В. Архангельский.* Топологические пространства функций.– М.: Изд. МГУ, 1989.–222 с.

9. *А. В. Архангельский.* Канторовская теория множеств.–М.: Изд. МГУ, 1988.–112 с.

10. *Ф.Р. Гантмахер.* Теория матриц.–М.: Наука, 1967.–556с.

11. *М.И. Граев.* Свободные топологические группы// Изв. АН СССР Сер. матем..–1948.–Т.12.–С.279–323.

12. *И. И. Гуран.* О топологических группах, близких к финально компактным// ДАН СССР.–1981.–Т.256, N6.–С.1305–1307.

13. *И. И. Гуран.* Топологические группы и свойства их подпространств: Дис. ...канд. фiз.-мат. наук: М., 1981.–69 ст.

14. *І. Й. Гуран, М. М. Зарічний.* Елементи теорii топологiчних груп: Навч. посiб.–К.: УМК ВО, 1991.–76 с.

15. *Р. Энгелькинг.* Общая топология. М.: "Мир", 1986.–751 ст.

16. *Е. Г. Зеленюк.* Топологии на группах, определяемые компактами// Математичнi Студiї.–1995.– Вип.5.–С.5–16.

17. *А.А. Марков.* О свободных топологических группах// ДАН СССР.–1941.–Т.31, N3.–С.299–301.

18. *А.А. Марков.* О свободных топологических группах// Изв. АН СССР Сер. матем..–1945.–Т.9.–С.3–64.

19. *С.Н. Недев, М.М. Чобан.* О метризуемости топологических групп// Вестн. Моск. ун-та сер. матем., мех..–1968.–N6.–С.18–20.

20. *С. Й. Недев.* O-метризуемые пространства// Тр. Моск. матем. об-ва.–1971.–Т.24.–С.201–236.

21. *В. Г. Пестов.* Некоторые свойства свободных топологических групп// Вестн. Моск. ун-та сер. матем., мех..–1982.– N1.–С.35–37.

22. *В. Г. Пестов.* Некоторые топологические свойства, сохраняемые отношением M-еквивалентности// Успехи Мат. Наук.–1984.– Т.39, вып.6.–С.203–304.

23. *В. В. Успенский.* О топологии свободного локально-выпуклого пространства// ДАН СССР.–1983.–Т.270, N6.–С.1334–1337.

24. *Л. Фукс.* Бесконечные абелевы группы, I. М.: "Мир", 1974. –335с.

25. *Н. Н. Яковлев.* К теории o-метризуемых пространств// ДАН СССР.–1976.–Т.229, N6.–С.1330–1332.

26. *M. Aigner.* Combinatorial Theory.– Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 234.– Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979. viii+483 pp.

27. *A.V. Arkhangelski, S.P. Franklin.* Ordinal invariants for topological spaces// Michigan Math. J.–1968.–Vol.15.–P.313–320;

28. *L. Babinkostova.* Metrizable groups and strict o-boundedness// submitted.

29. *L. Babinkostova, L.D.R.Kočinac, M. Scheepers.* Combinatorics of open covers (XI): Menger- and Rothberger-bounded groups// to appear in Topology Appl..

30. *T. Banakh.* On topological groups containing a Fréchet-Urysohn fan// Matematychni Studii.–1998.–Vol.9, N2.–P.149–154.

31. *T. Banakh.* Topological classification of strong duals to nuclear (LF)-spaces// Studia Math..–2000.–Vol.138, N3.–P.201–208.

32. *T. Banakh.* Topological classification of zero-dimensional $\mathcal{M}_\omega$-groups// Matematychni Studii.–Vol.15, N1.–P.109–112.

33. *T.Banakh.* On index of total boundedness of (strictly) o-bounded groups// Topology Appl.–2002.–Vol.120.–P.427–439.

34. *T. Banakh, P. Nikolas, M. Sanchis.* Filter games and pathologic subgroups of $\mathbb{R}^\omega$// to appear in J. Aust. Math. Soc..

35. *T. Banakh, L. Zdomskyy.* The topological structure of (homogeneous) spaces and groups with countable cs*-character// Applied General Topology.–2004.–Vol.5, N1.–P.25–48.

36. *T. Banakh, L. Zdomskyy.* Each second countable abelian group is a subgroup of a second countable divisible group// Алгебраїчні структури та їх засосування: Праці Українського математичного конгресу–2001. - Київ, Інститут математики НАН України (2002), с.132–140.

37. *T. Banakh, L. Zdomskyy.* Selection principles and infinite games on multicovered spaces and their applications: a survey// Monograph series of Quaderni di Matematica, to appear.

38. *T. Banakh, L. Zdomsky.* Coherence of Semifilters. (Submitted.) `http://www.franko.lviv.ua/faculty/mechmat/Departments/Topology/booksite.html`

39. *T. Banakh, L. Zdomskyy.* Coherence of Semifilters: a survey// Monograph series of Quaderni di Matematica, to appear.

40. *T. Bartoszynski, B. Tsaban.* Hereditary Topological Diagonalizations and the Menger-Hurewicz Conjectures// Proc. Amer. Math. Soc..–2006.–Vol.134, N2.–P.605–615.

41. *G. Birkhoff.* A note on topological groups// Comp. Math..–1936.–Vol.3.–P.427–430.

42. *G. Birkhoff.* Tres observaciones sobre el algebra lineal // Rev. Univ. Nac Tucumaán. ser. A. – 1946. – V.5. –P.147-151.

43. *A. Blass.* Combinatorial cardinal characteristics of the continuum.– To appear in Handbook of Set Theory (eds. M. Foreman, et. al.).

44. *A. Bouziad.* Le degré de Lindelöf est l-invariant// Proc. Amer. Math. Soc..–2001.–Vol.129.–P.913–919.

45. *J. Chaber, R. Pol.* A remark on Fremlin–Miller theorem concerning the Menger property and Michael concentrated sets// Unpublished notes.

46. *W. Comfort.* Topological groups// Handbook of Set-theoretic Topology (eds. K.Kunen, J.E.Vaughan).–Elsevier Science Publishers B.V.– North-Holland, Amsterdam.–1984.–P.1143–1263.

47. *E.K. van Douwen.* The integers and Topology// Handbook of Set-theoretic Topology (eds. K.Kunen, J.E.Vaughan).–Elsevier Science Publishers B.V.– North-Holland, Amsterdam.–1984.–P.111–167.

48. *R. Engelking.* Theory of Dimensions, Finite and Infinite.–Sigma Series in Pure Mathematics, 10.–Heldermann Verlag, 1995.–viii+401 pp.

49. *S.P. Franklin, B.V. Smith Thomas.* A survey of k_ω-spaces// Topology Proc.–1977.–Vol.2.–P.111–124.

50. *J. Gerlits, Zs. Nagy.* Some properties of $C(X)$, I// Topology Appl..–1982.–Vol.14, N2.–P.151–163.

51. *C. Hernandes.* Topological groups close to being σ-compact// Topology Appl..–2000.–Vol.102.–P.101–111.

52. *C. Hernandes, D. Robbie, M. Tkachenko.* Some properties of o-bounded and strictly o-bounded topological groups// Applied General Topology.–2000.–Vol.1, N1.–P.29–43.

53. *K. Hrbacek, T. Jech.* Introduction to set theory.– Third edition. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 220.– Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.–xii+291 pp.

54. *W. Hurewicz.* Über Folgen stetiger Functionen// Fund. Math..–1927.–Vol.9.–P.193–204.

55. *W. Just, A.W. Miller, M. Scheepers, P.J. Szeptycki.* The combinatorics of open covers II// Topology Appl..–1996.–Vol.73.–P.241–266.

56. *W. Just, M. Weese.* Discovering Modern Set Theory, I. The basics.–Graduate Studies in Mathematics, 8.–American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.–xviii+210 pp.

57. *S. Kakutani.* Über die Metrisation der Topologischen Gruppen// Proc. Imp. Acad. Tokyo.–1936.–Vol.12.–P.82–84.

58. *A. Kechris.* Classical Descriptive Set Theory.–Graduate Texts in Mathematics, 156.–Springer-Verlag, New York, 1995.–xviii+402 pp.

59. *A. Krawczyk, H. Michalewski.* An example of a topological group// Topology Appl..–2003.–Vol.127.–P.325–330.

60. *A. Lelek.* Some cover properties of spaces// Fund. Math..–1969.– Vol.65.– P.209-218.

61. *S. Lin.* A note on Arens space and sequential fan// Topology Appl..–1997.– Vol.81.–P.185-196.

62. *M. Machura, B. Tsaban.* The combinatorics of the Baire group// submitted.

63. *D.A. Martin, R.M. Solovay.* Internal Cohen Extensions// Ann. Math. Logic.–1970.–Vol.2.–P.143–178.

64. *K. Menger.* Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre, Sitzungsberichte// Abt. 2a, Mathematic, Astronomie, Physic, Meteorologie und Mechanic (Wiener Akademie).–1924.– Vol.133.–P.421–444.

65. *J. Nagata.* Generalized Metric Spaces, I// Topics in General Topology (eds. K.Morita, J.Nagata).–Elsevier Science Publishers B.V., 1989.–P.315–366.

66. *P. Nyikos.* Metrizability and the Fréchet-Urysohn property in topological groups// Proc. Amer. Math. Soc..–1981.–Vol.83, N4.–P.793–801.

67. *P.J. Nyikos.* Classes of compact sequential spaces//Set Theory and its Applications (eds. J. Steprans, S. Watson).–Lect. Notes in Math.–Vol.1401.– Springer-Verlag, Berlin etc., 1989.–P.135–159.

68. *V.G. Pestov, K. Yamada.* Free topological groups over metrizable spaces and direct limits// Topology Appl..–1999.–Vol.98.–P.291–301.

69. *A. Plichko, A. Zagorodnyuk.* Isotropic mappings and automatic continuity of polynomial, analytic, and convex operators// General Topology in Banach Spaces (T.Banakh ed.). – New York: Nova Publ., 2001.– P.1–13.

70. *R. Pol.* A function space $C(X)$ which is weakly Lindelöf but not weakly compactly generated// Studia Math..–1979.-Vol.64.–P.279–285.

71. *I.V. Protasov, E.G. Zelenyuk.* Topologies on groups determined by sequences.– Matematychni Studii, Monograph Series, Vol.4. Lviv: VNTL.- 1999.–111 p.

72. *W. Roelcke, S. Dierolf.* Uniform structures on topological groups and their quotients.–Advanced Book Program.–McGraw-Hill International Book Co., New York, 1981.–xi+276 pp.

73. *K. Sakai.* On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds// Topology Appl..–1984.–Vol.18.–P.69–79.

74. *H. Schaefer.* Topological vector spaces.–The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., London, 1966.–ix+294 pp.

75. *M. Scheepers.* A direct proof of a theorem of Telgarsky// Proc. Amer. Math. Soc..–1995.–Vol.123, N11.–P.3483–3485.

76. *M. Scheepers.* Combinatorics of open covers I: Ramsey Theory// Topology Appl..–1996.–Vol.69.–P.31–62.

77. *M. Scheepers, B. Tsaban.* The combinatorics of Borel covers// Topology Appl..–2002.–Vol.121.–P.357–382.

78. *A. Shibakov.* Metrizability of sequential topological groups with point-countable k-network// Proc. Amer. Math. Soc..–1998.–Vol.126.–P.943–947.

79. *Y. Tanaka.* Theory of k-networks// Q & A in General Topology.–1994.–Vol.12.–P.139–164.

80. *R. Telgarsky.* On sieve-complete and compact-like spaces// Topology Appl..–1983.–Vol.16.–P.63–68.

81. *R. Telgarsky.* Spaces defined by topological games// Fund. Math..–1983.–Vol.116.–P.189–207.

82. *R. Telgarsky.* On games of Topsϕe// Math. Scand..–1984.–Vol.54.–P.170–176.

83. *R. Telgarsky.* Topological games: on the 50th anniversary of the Banach-Mazur game// Rocky Mountain J. Math..–1987.–Vol.17, N3.–P.227–276.

84. *M. Tkachenko.* Introduction to topological groups// Topology Appl..–1998.–Vol.86.–P.179–231.

85. *M. Tkachenko.* Topological groups for topologists: part II// Bol. Soc. Mat. Mexicana..–2000. Vol.3, N6.–P.1–41.

86. *V. Tkachuk.* Some non-multiplicative properties are l-invariant// Comment. Math. Univ. Carolin..–1997.–Vol.38.–P.169–175.

87. *B. Tsaban.* o-Bounded groups and other topological groups with strong combinatorial properties// Proc. Amer. Math. Soc..–2006.–Vol.134, N3.–P.881–891.

88. *B. Tsaban.* Selection principles in mathematics: A milestone of open problems// Note Mat..–2003/2004.–Vol.22, N2.–P.179–208.

89. *B. Tsaban, L. Zdomskyy.* Scales, Fields, and a problem of Hurewicz// submitted to J. Amer. Math. Soc.. `http://arxiv.org/abs/math.GN/0507043`.

90. *B. Tsaban, L. Zdomskyy.* Menger's covering property and groupwise density// to appear in J. Symbolic Logic.

91. *J. Vaughan.* Small uncountable cardinals and topology// Open problems in topology (eds. J. van Mill, G.M. Reed), Elsevier Sci. Publ., 1990.–P.197–216.

92. *N. V. Velichko.* The Lindelöf property is l-invariant// Topology Appl..–1998. Vol.89.–P.277–283.

93. *L. Zdomskyy.* A semifilter approach to selection principles// Comment. Math. Univ. Carolin..–2005.–Vol.46.–P.525–539.

94. *L. Zdomskyy.* o-Boundedness of free objects over a Tychonoff space// Matematychni Studii.–2006.–Vol.25, N1.–P.10–28.

95. *E. Zelenyuk.* On group operations on homogeneous spaces// Proc. Amer. Math. Soc..–2003.–Vol.132, N4.–P.1219–1222.

Предметний покажчик

Список позначень